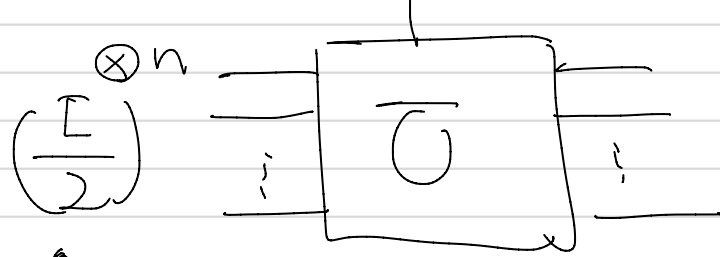
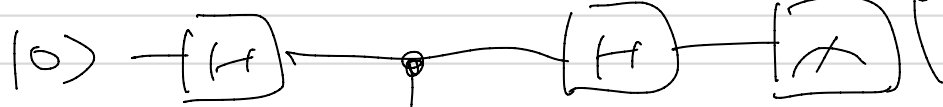


量子スプレッド (≠ 2=バニール) (Boson Sampling (Aaronson - Arkhipov))

Hadamard test.



↑  
完全混合状態

$$P_0 = \frac{1 + \text{ReTr}[U/2^n]}{2}$$

DQC1 (one-clean qubit model)

Kaill-Lafamme. PRL '98

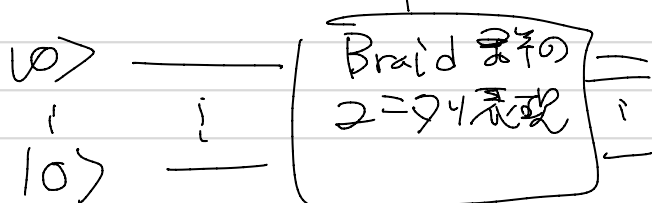
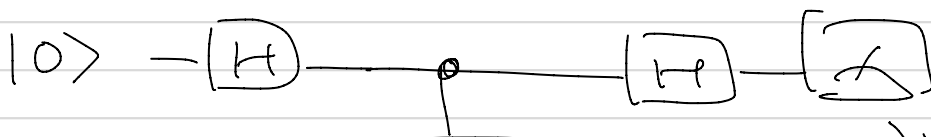
Jones 2-qubit の 3-qubit

Shor-Jordan Quantum Info. & Comp.

Hardness の 証明 '08.

Morimae-Fujii-Fitzsimons PRL '14

Fujii et al ICALP '16 (arXiv '15)



↓ Jones 2-qubit

Aharonov et al arXiv '05

$$\frac{1}{2}(\mathbf{I} + \sigma) = \sum_i (1 + e^{2\pi i \lambda_i}) |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{I} - \sigma) = \sum_i (1 - e^{2\pi i \lambda_i}) |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|$$

$$\rho \xrightarrow{\mathcal{E}} \frac{1}{4}(\mathbf{I} + \sigma)\rho(\mathbf{I} + \sigma)^\dagger + \frac{1}{4}(\mathbf{I} - \sigma)\rho(\mathbf{I} - \sigma)^\dagger$$

$$\rho_{\text{fix}} = \sum_{ij} C_{ij} |\lambda_i\rangle\langle\lambda_j|$$

$$\mathcal{E}(\rho_{\text{fix}}) = \frac{1}{4} C_{ij} \left\{ (1 + e^{2\pi i \lambda_i})(1 + e^{-2\pi i \lambda_j}) + (1 - e^{2\pi i \lambda_i})(1 - e^{-2\pi i \lambda_j}) \right\}$$

$$\mathcal{E}(\rho_{\text{fix}}) = \rho_{\text{fix}} \mathcal{E}(1).$$

$$C_{ij} = \frac{1}{2} C_{ij} (1 + e^{2\pi i (\lambda_i - \lambda_j)})$$

$i \neq j$  ならば  $e^{2\pi i (\lambda_i - \lambda_j)} \neq 1$  である。

$C_{ij} \neq 0$  ならば  $i = j$ 。

$\rho_{\text{fix}}$  は  $|\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|$  の重ね合わせ。

→ Hadamard test  $e^{2\pi i \lambda_i}$

基底  $|\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|$  の  $\mathcal{E}$  での作用を  
 検証可能。

## Part 2 量子誤り訂正.

○ 一般の量子操作.

$$\rho \rightarrow \rho' = \mathcal{E}(\rho)$$

↑  
密性行列への写像.

= CPTP 写像

completely positive

trace preserving.

① positive

$$\rho' = \mathcal{E}(\rho) \geq 0$$

② completeness

$$\sum_A \otimes \mathbb{I}_B (\rho_{AB}) \geq 0$$

③  $\text{Tr}(\mathcal{E}(\rho)) = 1.$

CPTP  $\Leftrightarrow$  Kraus 表現

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_k K_k \rho K_k^\dagger.$$

0  $\vec{T}$  コヒーレンス



量子系      環境系 (外場の光子, 基底物 etc.)

(例)

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |+\rangle$$

$$\left\{ e^{\frac{-i\theta Z \otimes Z}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} I + i\sin\frac{\theta}{2} Z \otimes Z \right.$$

$$\rho_{AE} = e^{\frac{-i\theta}{2}} \frac{\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle}{\sqrt{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}} \frac{\alpha|01\rangle + \beta|10\rangle}{\sqrt{2}}$$

インタクションあり

環境のことは何も知らず  $\rho_A \rightarrow$  reduced density matrix

$$\rho_A = |\alpha|^2 |0\rangle\langle 0| + \cos\theta (\alpha\beta^* |0\rangle\langle 1| + \alpha^*\beta |1\rangle\langle 0|) + |\beta|^2 |1\rangle\langle 1|$$

$\rightarrow$  対角項が小さくなる,  $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1+\cos\theta}{2} \rho + \frac{1-\cos\theta}{2} Z \rho Z$$

$\frac{1-\cos\theta}{2} Z \rho Z$  により Z が作用する

量子 /  $2^n$

CPTP写像. 
$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger$$
 Kraus 操作.

$$\left( \sum_k E_k^\dagger E_k = I \leftarrow \text{Tr}[\mathcal{E}(\rho)] = \text{Tr}[E_k^\dagger E_k \rho] \right)$$

例)  $|0\rangle \rightarrow$  確率  $p$  の  $Z$  パウリ X 作用.

$(1-p)|0\rangle\langle 0| + p|1\rangle\langle 1|$

$$\mathcal{E}_X(\rho) = (1-p)\rho + pX\rho X$$

位相反転 [X]

$$\mathcal{E}_Z(\rho) = (1-p)\rho + pZ\rho Z$$

位相反転 [Z]

$$\mathcal{E}_{in}(\rho) = (1-p)\rho + p|0\rangle\langle 1|\rho|1\rangle\langle 0|$$

$+ p|0\rangle\langle 0|\rho|0\rangle\langle 0|$

確率的 /  $2^n$  エントリ.

$$\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

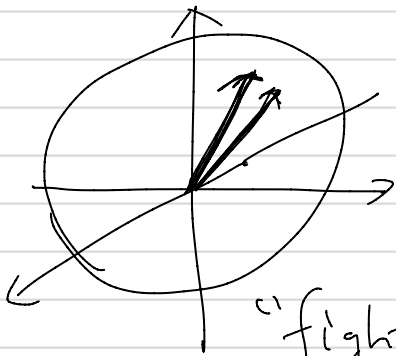
$$\rightarrow |\alpha|^2 |0\rangle\langle 0| + \cos\theta \left( \alpha^* \beta |0\rangle\langle 1| + \alpha \beta^* |1\rangle\langle 0| \right) + |\beta|^2 |1\rangle\langle 1|$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad |\alpha|^2 |0\rangle\langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle\langle 1|$$

$$\rho = \frac{1+\cos\theta}{2} \rho + \frac{1-\cos\theta}{2} \bar{\rho}$$

取  $\frac{1-\cos\theta}{2} z^{-1}$ , 使得  $\rho$  起作用。

# ① 量子誤り訂正 (Shor)



・エラーは連続的

・量子状態のコピーはできない

"fight entanglement with entanglement" by Preskill

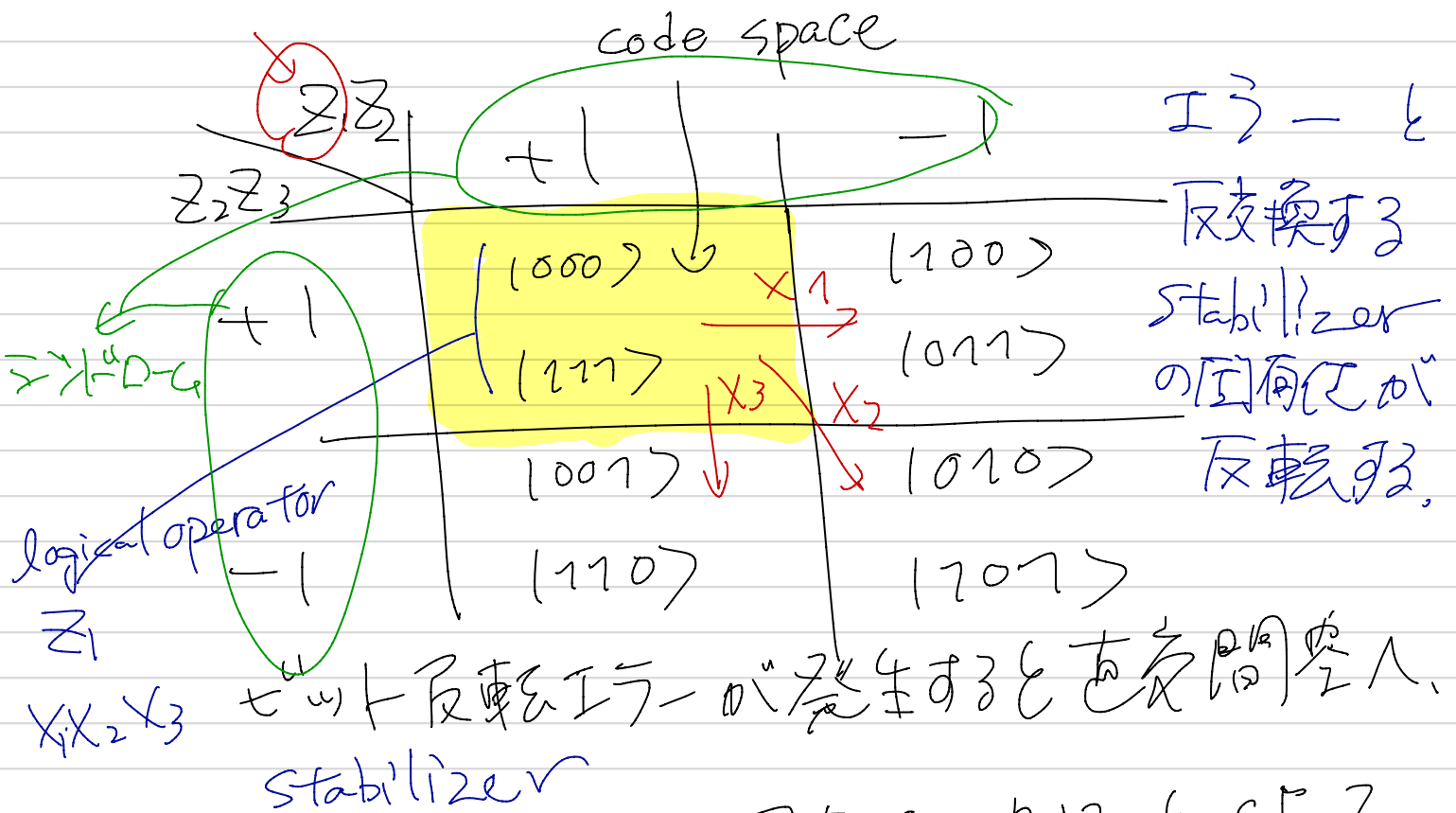
$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \alpha|1000\rangle + \beta|1111\rangle$$

$$A_k = I \otimes I \otimes \dots \otimes A \otimes \dots \otimes I$$

1個

$|1000\rangle, |1111\rangle$  を基底とする

2次元部分空間 (空間) に閉じ込める



$Z_1, Z_2, Z_2 Z_3$  の固有値を測るとにより、量子状態を壊さずにエラーを知る。

① ステートライザ形式 (Gottesman '97)

ステートライザ群  $\mathcal{S}$

- $S_i \in \mathcal{S}$  はパウリ積,  $\mathcal{S} \subset \{\pm I, \pm iI\} \times \{I, X, Y, Z\}^{\otimes n}$
- $\forall S_i, S_j \in \mathcal{S}, [S_i, S_j] = 0$ .  $aI \notin \mathcal{S}$ .
- $-I \notin \mathcal{S}$  (固有値は  $\pm 1$ ).

ステートライザ状態

$$S_i |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \quad \text{for all } i.$$

Σ 固有状態  $|\Psi\rangle$

(例)  $\{I, X_1 X_2, Z_1 Z_2, -Y_1 Y_2\} = \langle \{X_1 X_2, Z_1 Z_2\} \rangle$   
生成元.

$$\rightarrow (|00\rangle + |11\rangle) / \sqrt{2}$$



5 qubit code.

可換なパリティ演算子の  
固有状態として状態定義

$$S_1 = Z X X Z I$$

$$S_2 = I Z X X Z$$

$$S_3 = Z I Z X X$$

$$S_4 = X Z I Z X$$

$$S_i |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \text{ for all } i$$

すなわち 2次元の縮退が残る。

$$2^5 / 2^4 = 2 = \text{次元の部分空間}$$

→ logical operator  
(縮退を2倍にする)

$$L^Z = Z Z Z Z Z$$

$$L^X = X X X X X$$

ともに  $S_1 \sim S_4$  と可換。

$$\rightarrow S_i (L^X |\Psi\rangle) = (L^X |\Psi\rangle)$$

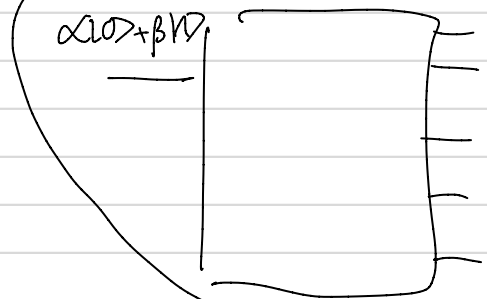
↓  
= 異なる subspace  $\wedge$ .

$S_1 \sim S_4$  と独立。

$$L_Z |\bar{0}\rangle = |\bar{0}\rangle, L_Z |\bar{1}\rangle = -|\bar{1}\rangle$$

$$L_X L_Z = -L_Z L_X \text{ 故に } L_X |\bar{0}\rangle = |\bar{1}\rangle$$

$$\alpha |\bar{0}\rangle + \beta |\bar{1}\rangle \rightarrow \alpha |\bar{0}\rangle + \beta |\bar{1}\rangle$$



$$\alpha |\bar{0}\rangle + \beta |\bar{1}\rangle$$

holographic  
code.

(AdS/CFT)

Pastawski  
et al '15

$$|\bar{0}\rangle = \frac{1}{4} \left( |10000\rangle + |10010\rangle + |10100\rangle + |10100\rangle \right. \\
+ |01010\rangle - |11011\rangle - |00110\rangle - |11000\rangle \\
- |11101\rangle - |00011\rangle - |11110\rangle - |01111\rangle \\
\left. - |10001\rangle - |01100\rangle - |10111\rangle + |00101\rangle \right)$$

絶対値を取ると  $\sqrt{2}$  になる!!

○ 符号距離 (code distance)

$$d = \min_L \text{wt}(L)$$

logical operator

重み = 1 のビットの数

$$L_X = X^{\otimes 5}$$

$$(111) \text{wt}(11111) = 2$$

$$= 2$$

$$L_X S_1 = -Y I I Y X$$

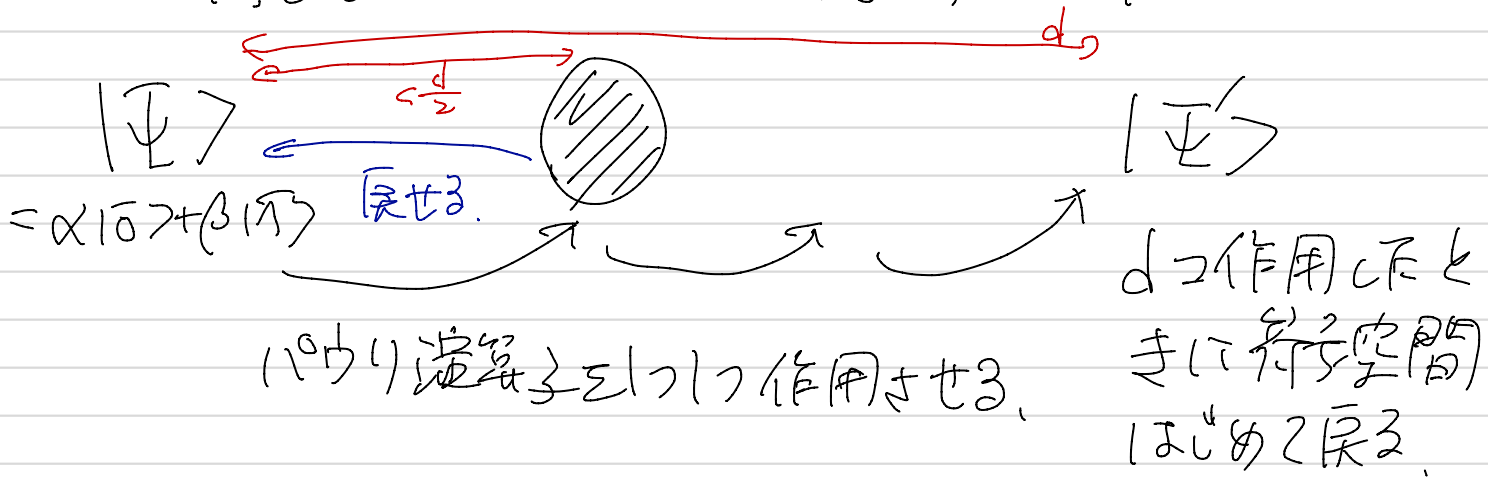
$$\text{wt}(L_X S_1) = 3$$

$\hookrightarrow$  = k-bit logical operator

5 qubit code の code

$$\underline{d = 3}$$

符号距離 = 符号状態間のわり



$d=3 \rightarrow$  上のことを訂正.

$2^5$ 次元を  $2^4$ 個の直交空間へ分割.

||  
16パターンのコード.

各 qubit に対応する 3種類 (X, Y, Z) の I<sup>3</sup>-

$$3 \times 5 = 15$$

$$15 + 1 = 16$$

I<sup>3</sup>のみ

I<sup>3</sup>-とコードのみ  
に対応.

$S_1 \sim S_4$  の固有値を測り、訂正.

$$X_3 \rightarrow (+1, +1, -1, +1)$$

$$Z_4 \rightarrow (+1, +1, -1, -1)$$

$$(Y_2 Y_3) \rightarrow (+1, +1, -1, -1)$$

確率  $P$  が独立にパウリ  
I<sup>3</sup>-

$\rightarrow$  失敗確率は  
 $\mathcal{O}(P^2)$

① I3- の離散化.

$$\text{量子化} \quad \rho = \sum_R E_R \rho E_R^\dagger$$

(量子ビット)

パウリ演算子とは限らない.

このまじの話

$$\mathcal{R}(A | \Psi \times \Psi | A) = |\Psi \times \Psi\rangle$$

↑ ↑  
A = X, Y, Z  
回復操作.

$$\mathcal{R}(\rho) = \sum_R R_L \rho R_L^\dagger \text{ と書ける.}$$

$$R_L A |\Psi\rangle \propto |\Psi\rangle \quad \text{が満たされている.}$$

$$\textcircled{?} \mathcal{R} \circ \mathcal{E}(|\Psi\rangle) = ?$$

$$E_R = C_R^I I + C_R^X X + C_R^Y Y + C_R^Z Z$$

$$R_L E_R |\Psi\rangle \propto |\Psi\rangle$$

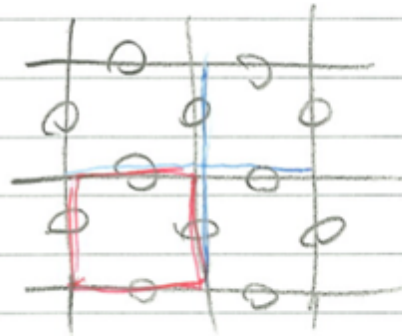
$$\mathcal{R} \circ \mathcal{E}(|\Psi\rangle) = \sum_L \sum_R R_L E_R \rho E_R^\dagger R_L = |\Psi \times \Psi\rangle$$

線形性.

① Kitaev's toric code.  
(topological code)



$N \times N$  の正格子



3D上のgauge  
の配置  
 $\rightarrow 2N^2$

〇 スタールケット  
plaquette

$$A_f = \prod_{i \in \partial f} Z_i$$

↑ 面に沿って

star.

$$B_u = \prod_{j \in \text{star}(u)} X_j$$

↑ 面に垂直

〇 符号状態

〇  $A_f |\Psi\rangle = |\Psi\rangle, B_u |\Psi\rangle = |\Psi\rangle$

〇 次元 # gauge  $|E| = 2N^2$

# generator  $|F| + |V| - 2 = 2N^2 - 2$

$$\dim = 2^{2N^2} / 2^{(2N^2-2)} = 2^2 = 4 \quad \prod_f A_f = \prod_u B_u = I$$

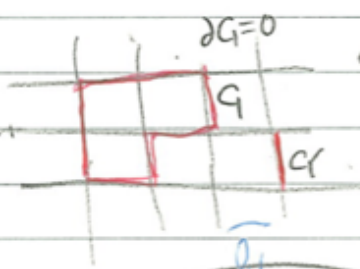
一般の平面では  $|V| + |F| - |E| = 2 - 2g$

$$|E| - (|V| + |F| - 2) = 2g \quad \leftarrow \text{genus}$$

$$\dim = 2^{2g}$$

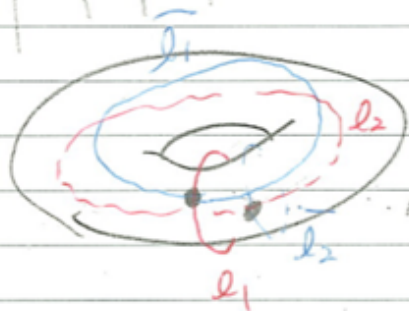
◦ logical operator

◦ Stabilizer & 交換 → cycle  $\partial C_1$



◦ Stabilizer & 交換 → nontrivial cycle.

(trivial cycle  $Z(\partial C_2) = \prod_{f \in C_2} A_f$ )



$$L_1^Z = Z(l_1), \quad L_2^Z = Z(l_2)$$

交換  $L_1^X = X(l_1), \quad L_2^X = Z(l_2)$

code distance → N.

$l_1 \sim l_1', \exists \exists C_2 \text{ s.t. } l_1' = l_1 + \partial C_2 \sim l_1'$

$Z(l_1) \sim Z(l_2)$  的性質 (同位)

logical operator の 作用

$$H = \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} \quad \text{homology class.}$$

$\uparrow$  stabilizer & 交換                       $\uparrow$  stabilizer group

logical operator の topology 的 作用

chain complex.

$$B_0 = \{h_i\} \quad B_1 = \{e_j\} \quad B_2 = \{f_k\}$$

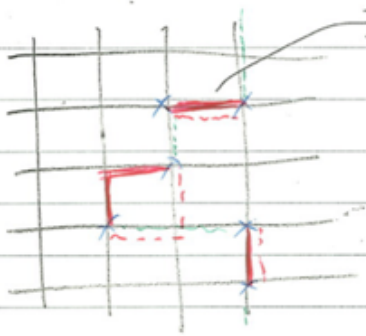
$$C_0 = \int_i z_i h_i, \quad C_1 = \int_j z_j e_j, \quad C_2 = \int_k z_k f_k$$

boundary map:  $\partial_i: C_i \rightarrow C_{i-1}$     s.t.  $\partial \circ \partial = 0$ .  
(準同型)

$$h_i = \text{Ker}(\partial_i) / \text{Im}(\partial_{i+1})$$



エラー検出と訂正.



error chain  $C^e$ ,  $Z$  error  $Z(C^e)$

→ 端点上の star operator と反交換

$$u \in \partial C^e \rightarrow B_u \text{ の固有値 } (-1)$$

$\partial C^e$  から  $C^e$  を推定.



OK

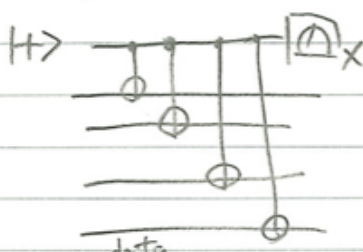


logical error.

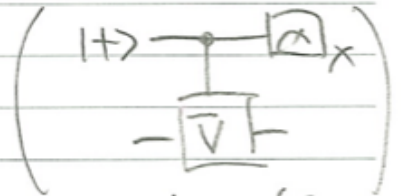
シフト- $u$ .  $\arg \max_{C^e} \text{Prob}(Z(C^e)) |_{\partial C^e = \partial C^e}$

→ 独立なエラーの場合, 最尤値で端点を推定  
minimum-weight-perfect-matching

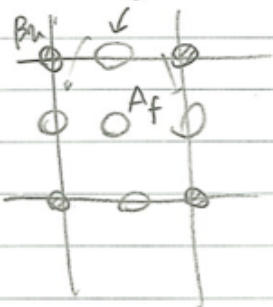
$A_f$  と  $B_u$  の測定.



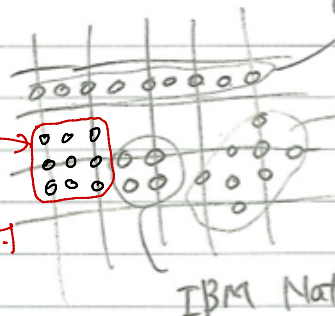
$B_u$  の測定  
( $A_f$  の同時)



Martin's Nature '15.  
UCSB,



4-qubit



IBM?  
(arXiv:1510.04375)

IBM Nat. Comm '15

"quantum computer guess"

Nature 516, 24-26  
(2014)