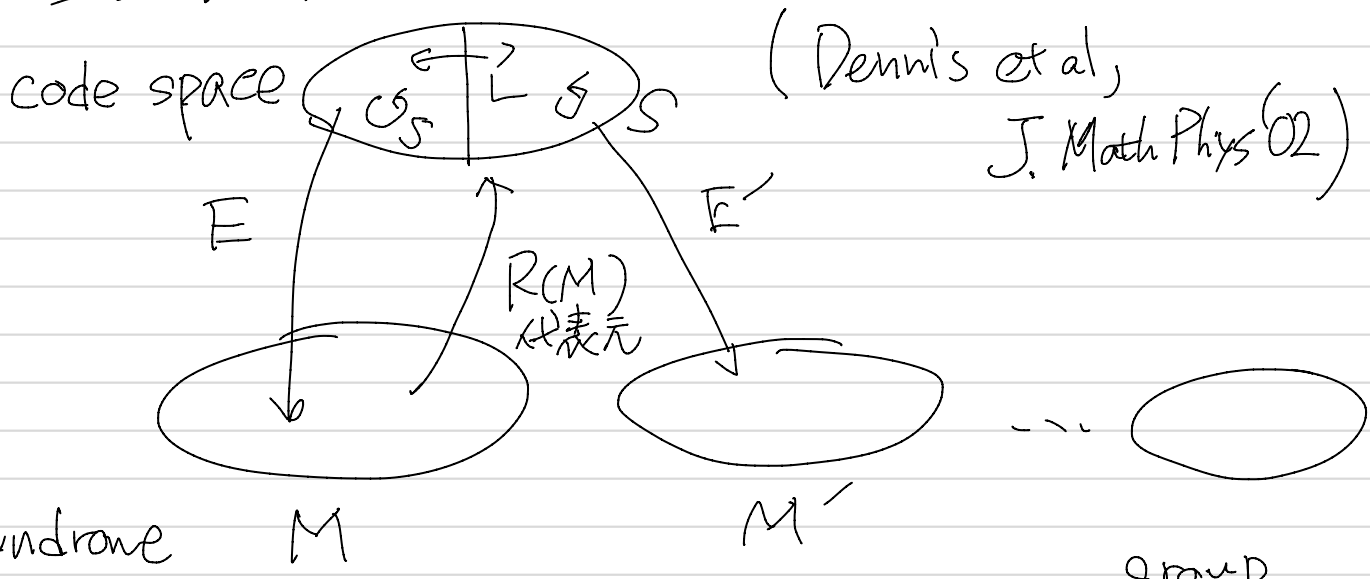


Part 3、物理との接点

- ① スピニングス模型と量子繰り下げ
- ② スピニングス模型とトポロジカル秩序

① 量子誤り訂正とスピングラウモデル



E の分解

$$E = R(M) L_j S_i \quad L_j \in \mathcal{L} \quad S_i \in \mathcal{S}$$

E の状態に戻すのは、 L_j が決める。

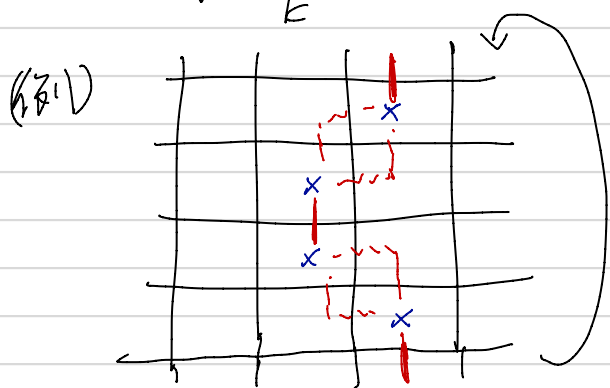
group generated by logical ops.

by stabilizer generators

② 最小制復号

$$\arg \max_E P(E|M)$$

M になる E の確率を最大化。 → 最適 E が見つかる。



$p^2 \times 1$ の例 $p^4 \times 2 \times 2$
同じ結果になる E の組が複数ある。

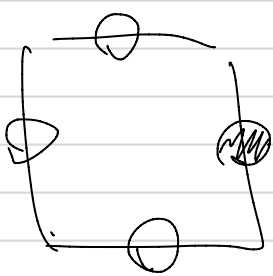
③ 最適復号

$$\arg \max_{L_j \in \mathcal{L}} \sum_{S_i} P(E|M)$$

同じ結果になる E の和。

$$P(L_j) = \arg \max_{L_j \in \mathcal{L}} \sum_{S_i} \text{Prob} (R(M) L_j S_i | M)$$

以下あるサイト i の M 個あるとき i の $P(L_i)$ の分布 (L_i) を考察する。



X_{\uparrow} と X_{\downarrow} が独立であるとして、
 X_{\uparrow} のみを用いる。

$$\text{Prob}(E) = \prod_i P^{n_i} (1-P)^{1-n_i}$$

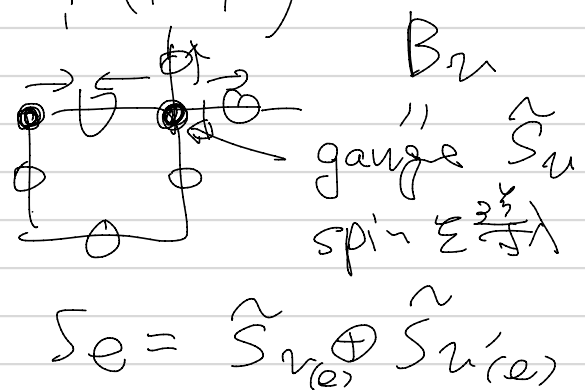
と仮定

$$E = R(M) L_j S_i$$

$$\prod_e X_e^{n_e} = \prod_e X_e^{(r_e \oplus l_e \oplus s_e)}$$

$$\text{Prob}(E|M) = \mathcal{N} \prod_i \left(\frac{P}{1-P} \right)^{r_e \oplus l_e \oplus s_e}$$

$\sum_{S_i \in S}$
 可能なすべての S_i の和。



$$\sum_{\{S_i\}} \text{Prob}(E|M) = \sum_{\{S_u\}} \mathcal{N} \exp\left[(-2\beta) \sum_e (r_e \oplus l_e) \oplus \hat{S}_u \oplus \hat{S}_v \right]$$

gauge spin \hat{S}_u の値 0 or 1 を、対応する B_u の値 ϵ と 2ω を用いて決める。

$$\hat{S}_a = 0, 1 \rightarrow G_a = +1, -1$$

$$\beta J (re \oplus le^{(i)}) \rightarrow \beta J e^{(j)} = \mathbb{I}[\beta J]$$

random-bond Ising model.

$$P(L_j) \propto \mathcal{Z}(\{\beta J e^{(j)}\})$$

$$H = -\sum_e J_e \sigma_{i(e)} \sigma_{j(e)} = -\sum_{ij} J_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

random-bond Ising model. (↑) $\sigma_i \sigma_j = 1$ じゃない

○ βJ の正の成項条件.

$$L^{est} \equiv \arg \max_{L_j} P(L_j)$$

$$L^{est} P(L_j) \sim \overline{E^{actual}} \quad (\text{實際には平均値})$$

平均値の積を平均値類. \rightarrow 真の工

$$P(L_j) = E^{actual} L^{est} \text{ とし.}$$

$$L^{est} L_j \in \text{新たに } \tilde{L}_j \text{ とし.}$$

成功する確率 $P(\tilde{L}_j = I)$ を求める.

$$P(\tilde{L}_j) \propto Z(\{\beta \tilde{J}_e^{(j)}\})$$

$$\bar{E}^{\text{actual}} \tilde{L}_j = \prod_e \chi_e \tilde{r}_e \oplus \tilde{l}_e \text{ とし、}$$

$$\tilde{r}_e \oplus \tilde{l}_e = 1 \text{ かつ、 } \beta \tilde{J}_e^{(j)} = -\beta J$$

$$\uparrow \quad \uparrow = 0 \quad = \beta \tilde{J}_e^{(j)} = \beta J.$$

実際のエー
の配置。

$\uparrow \times \uparrow = \text{spin-1}$.

||

anti-ferromagnetic (quenched randomness)

quenched randomness [に対する平均].

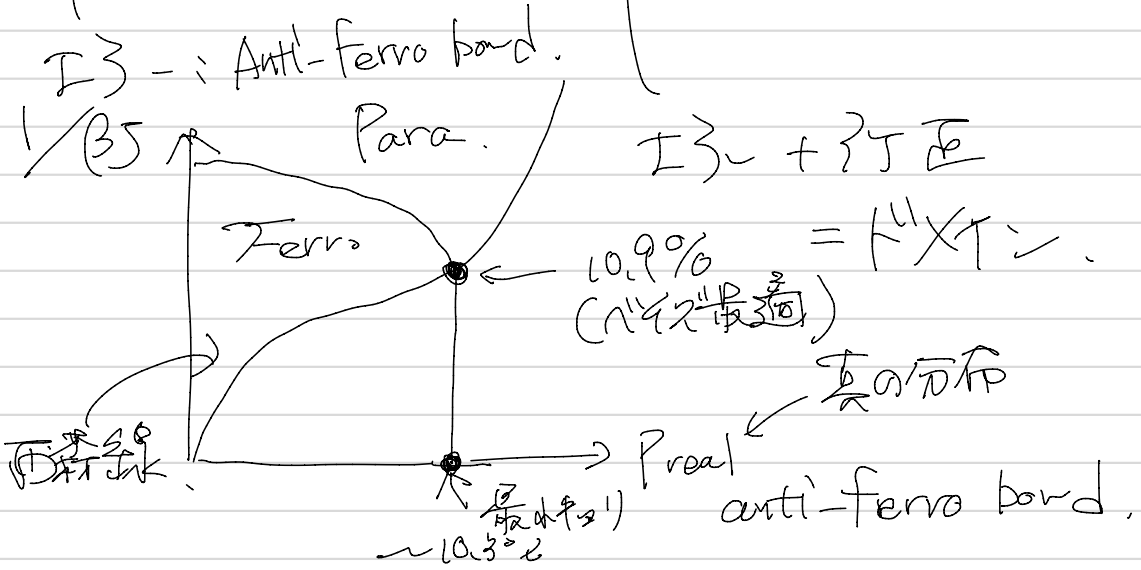
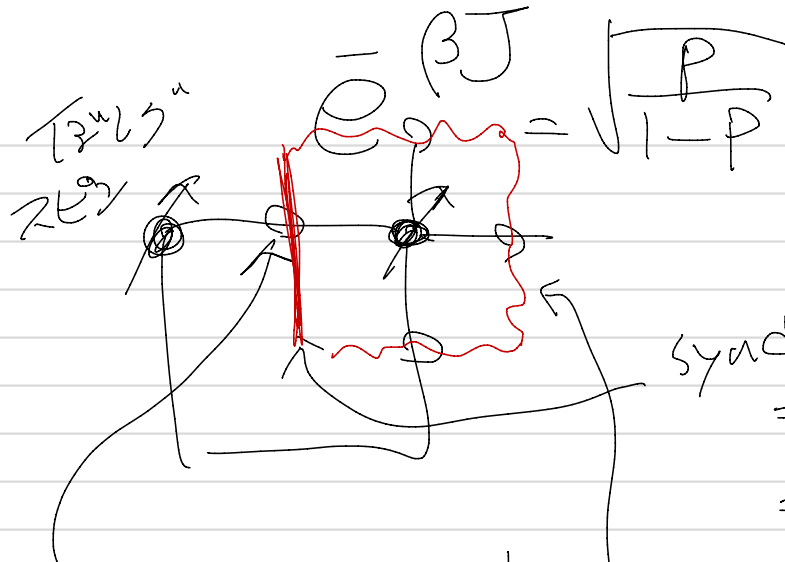
(= 実際のエー-の分布に対する平均-2x7 の平均)

$$\langle \ln P(\tilde{L}_j) \rangle \propto \int_{\bar{E}^{\text{actual}}} P(\bar{E}^{\text{actual}}) \ln Z(\{\beta \tilde{J}_e^{(j)}\})$$

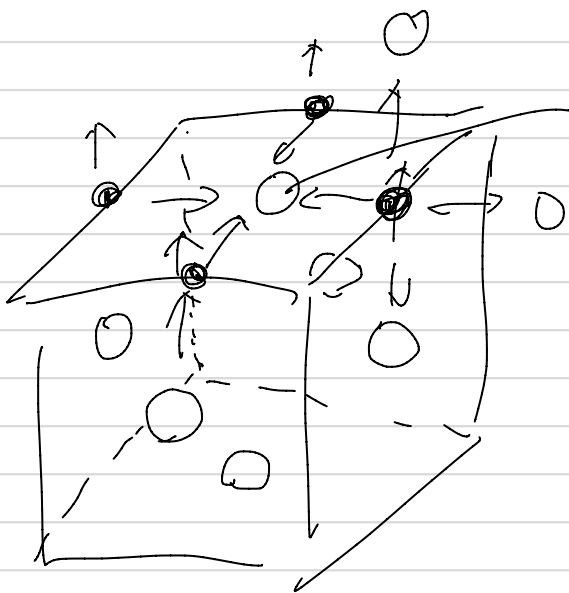
$$\equiv \langle \ln Z(\{\beta \tilde{J}_e^{(j)}\}) \rangle$$

自由エー-の配置平均.

Ferro 相では $\tilde{L}_j \in I$ に対応するトピックを挿入すると。
自由エー--が減少する \rightarrow 失敗確率(は小さく).



$\circ \Rightarrow \pi$ -flux vortex exists in the Γ -point region.
 $\Rightarrow \pi$ -flux vortex time series is used for reconstruction $\Rightarrow 1+2D$ model.



$$S_f = \prod_{e \in f} \tilde{S}_e$$

random plaquette
 \mathbb{Z}_2 gauge model.

only in $P \sim \Gamma$

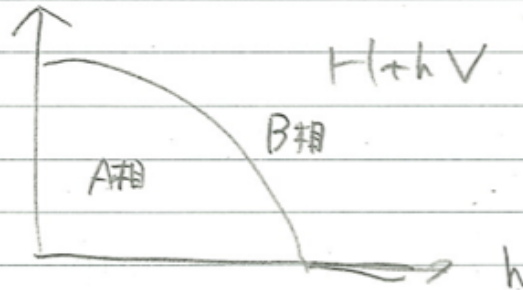
$P = 2.9 \sim 3.3\%$

② スタビライザモデルとトポロジカル秩序

$$\rightarrow H = -J \sum_i S_i$$

量子相.

$$\langle E_{gs} | Q | E_{gs} \rangle$$



→ トポロジカル相 基底状態の縮退の安定性.

1D イジングモデル

$$\langle \{z_i, z_{i+1}\}_{i=1}^{N-1} \rangle, \text{ logical operator } L^x = X^{\otimes N}$$

repetition code $L^z = Z_i$

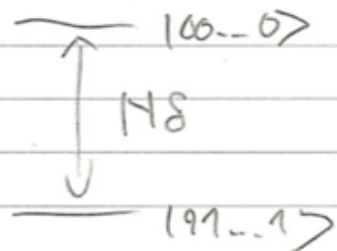
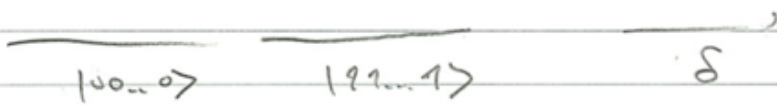
$$H_{Ising} = -J \sum_{i=1}^{N-1} z_i z_{i+1}$$

Symmetry: L^x global spin flip.

ground state: $\{ |00\dots 0\rangle, |11\dots 1\rangle \}$

g.s. degeneracy は、トポロジカルに固定.

$$H_{Ising} + S \sum_i z_i$$



$\alpha |00\dots 0\rangle + \beta |11\dots 1\rangle$ は基底状態.

→ code distance 1. 2 error は訂正できる.

• Unpaired Majorana fermion. (Kitaev '00)

$$\sum_{i,j} \dots$$

$$H_{Ising} = -J \sum_{i=1}^{N-1} z_i z_{i+1}$$

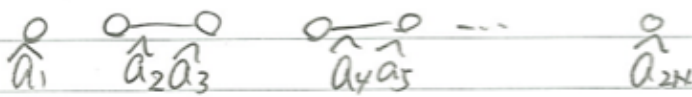
Jordan-Wigner transformation

$$\hat{a}_{2i-1} = X_1 \dots X_{i-1} z_i$$

$$\hat{a}_{2i} = X_1 \dots X_{i-1} y_i$$

$$\{\hat{a}_r, \hat{a}_{r'}\} = 2\delta_{r,r'} I$$

$$H_{Maj} = - \sum_{j=1}^{N-1} (-i) \hat{a}_{2j} \hat{a}_{2j+1}$$



grand state: $(-i) \hat{a}_{2j} \hat{a}_{2j+1} |\Psi\rangle = |\Psi\rangle$ for all j

$\rightarrow \{ |0\rangle, |\bar{1}\rangle \}$

$$(-i) \hat{a}_1 \hat{a}_{2N} |0\rangle = |\bar{1}\rangle$$

$$\hat{a}_1 |\bar{1}\rangle = -|\bar{1}\rangle$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &Y_1 X_2 \dots X_{2N-1} Y_{2N} \\ &\sim L^X \text{ (symmetry)} \end{aligned}$$

$$\downarrow \\ z_1 \sim L^Z \text{ (symmetry broken)}$$

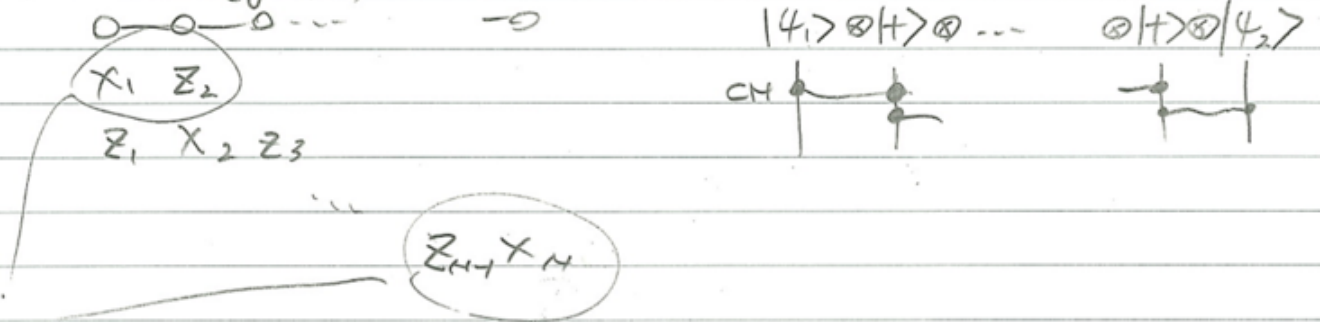
\rightarrow fermion or pairs of fermions
 \hat{a}_j の偶数項 L^X 項の中

Symmetry-protected topological order
 (g.s. degeneracy)

◦ 1D cluster model (Pachos-Pleuro PRL'04, Son et al EPL'11)

$$H_{\text{cluster}} = -J \sum_{i=2}^{N-1} Z_{i-1} X_i Z_{i+1}$$

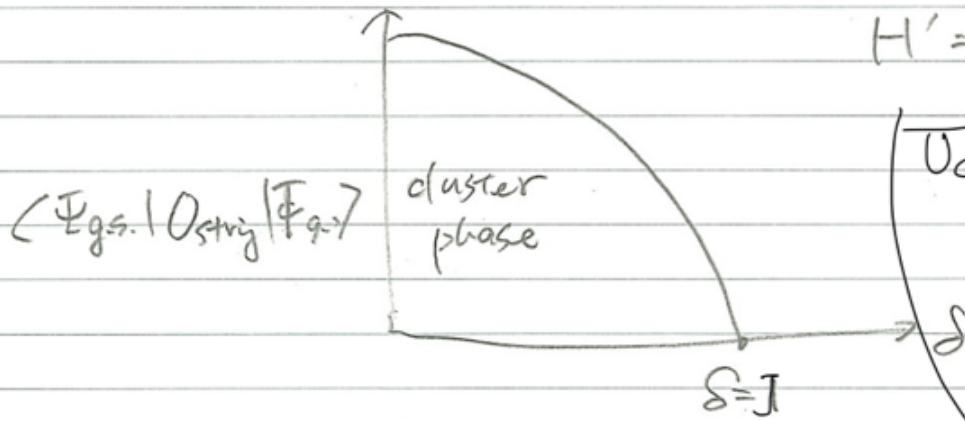
1D cluster (graph) state



logical operator と Z 利用、 \rightarrow 4 重系構造

Symmetry: $S_{\text{odd}} = \prod_{\text{odd}} X_i$, $S_{\text{even}} = \prod_{\text{even}} X_i$ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
 \rightarrow logical operator

g.s. deg. is $X_i, Z_i Z_{i+2}$ の基底空間に於て $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$



$$H' = H_{\text{cluster}} + \delta \sum_i X_i$$

$$\left(\begin{aligned} U_{\mathbb{Z}_2} H' U_{\mathbb{Z}_2} &= -J \sum_i X_i \\ &+ \delta \sum_i Z_{i-1} X_i Z_{i+1} \end{aligned} \right)$$

$$U_{\mathbb{Z}_2} = \prod_i \Lambda_{i,i+1}(\text{CZ})$$

$$O_{\text{string}} = Z_1 Y_2 X_3 \dots X_{N-2} Y_{N-1} Z_N$$

$$= \prod_i Z_{i-1} X_i Z_{i+1}$$

測定型量子計算

MBQC on SPT phase

4-fold degeneracy.

$$|\Psi_{cluster}\rangle = \sum_{i_1 \dots i_N} \langle R | A[i_1] \dots A[i_N] | L \rangle |i_1 \dots i_N\rangle$$

Matrix-product-state.

$$A[i_0] = |+\rangle\langle 0|, \quad A[i_1] = |-\rangle\langle 1|$$

$$\langle + |_1 \rangle |\Psi_{cluster}\rangle \propto \sum_{i_1 \dots i_N} \langle R | A[i_1] \dots A[i_N] | L \rangle$$

$$|+\rangle_1 |i_2 \dots i_N\rangle$$

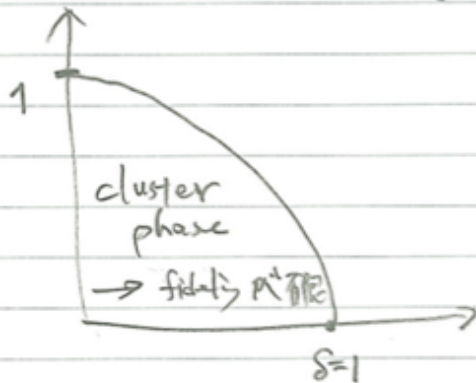
測定



MBQC

measurement based QC.

$$\rightarrow \text{fidelity } F = \frac{(1 + \langle O_{string}^{odd} \rangle)(1 + \langle O_{string}^{even} \rangle)}{4}$$



$$O_{string}^{o.e} = \prod_{\substack{i=1 \\ \text{odd, even}}} Z_{i-1} X_i Z_{i+1}$$

Poharty-Barrett, PRL '09

Fujii et al., PRL '13.

- spin-1 AKLT state (Brennen-Miyake PRL '08)

- Haldane phase (Bartlett-Brennen-Miyake-Renes PRL '10)

- SPT order parameter, gate fidelity

(Miller-Miyake PRL '15)

- two-point correlation \leftrightarrow computational capability

(Fujii-Morimae PRA '12)

⑥ トポロジカル相.

(Kitaev '97)

o Kitaev toric code Hamiltonian

$N \times N$ with p.b.

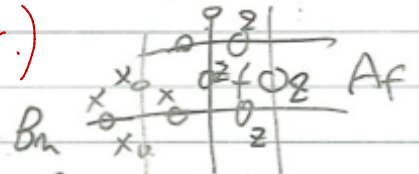
$$H = -J \left(\sum_f A_f + \sum_z B_z \right)$$



→ 基底状態は 4重 (= 縮退)

(一般的には 2^{2g} 縮退)

code distance N



→ N th order perturbation まで縮退は解けない.

⑦ Kato's perturbation theory.

$$H = \sum_i E_i P_i \quad (2\text{nd order solution})$$

$H + \lambda V$ の基底状態 Λ の projector は,

$$P_0(\lambda) = \sum_m \lambda^m P_0^{(m)}$$

$$P_0^{(m)} = -(-1)^m \sum_{l_1 + \dots + l_{m+1} = m} R_0^{(l_1)} V R_0^{(l_2)} \dots V R_0^{(l_{m+1})}$$

$$R_0^{(l)} = \begin{cases} -P_0 & \text{if } l=0 \\ \sum_{j \neq 0} P_j / (E_j - E_0)^l & \text{if } l > 0 \end{cases}$$

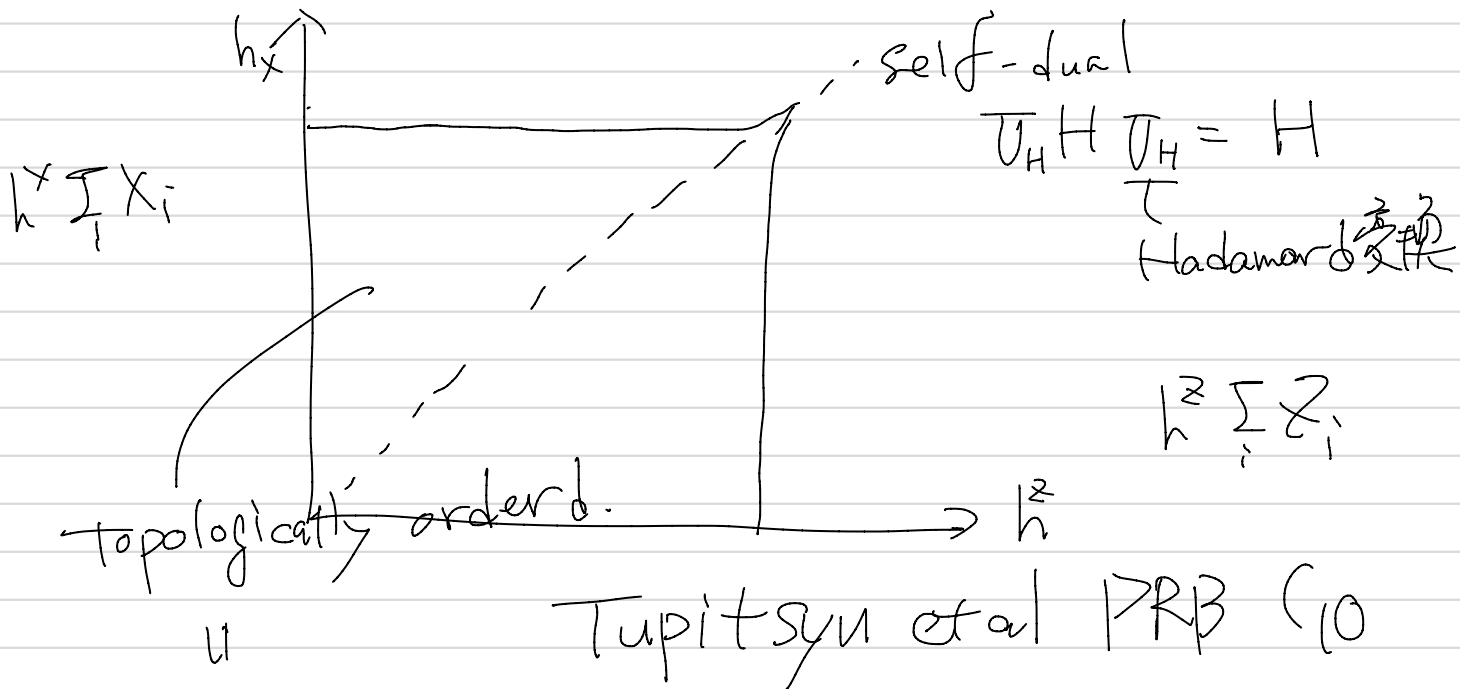
$V \rightarrow$ 1-body Pauli operator

N -次の非線形から $P_0^{(m)}$ は logical operator と見らるる.

(補) V は各量子ビットの演算子の和なので、logical operator となる場合の数まで考慮が必要である

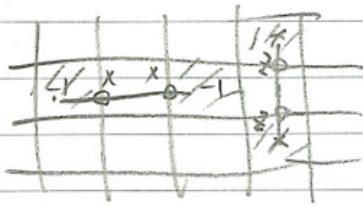
→ Bravyi-Hastings-Michalakis J. Math Phys '10

Toric code Hamiltonian の本質



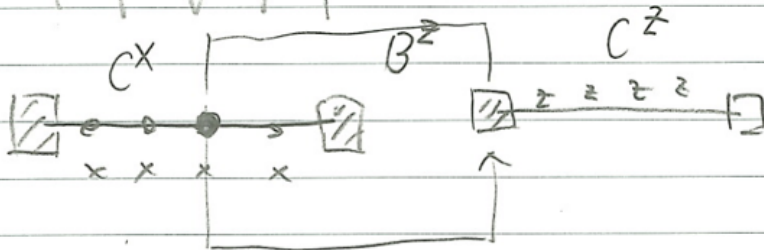
$\frac{10}{12}$ 子 モニター Q, 対応する基底系の Higgs 相.

Anyonic excitation



excitations \rightarrow -1 eigenvalues

X-type, Z-type



$$B^Z C^Z C^X |\Psi_{gs}\rangle$$

braid \neq -1 π^2 , \mathbb{Z}_2 Abelian anyon.

$$= -C^Z C^X B^Z |\Psi_{gs}\rangle$$

$$= -C^Z C^X |\Psi_{gs}\rangle$$

QEC code

topological order

code subspace

g.s. degeneracy

correctability of errors
(code distance d)

robustness against perturbation
up to $(d-1)$ th order

logical operator

specify the g.s. deg.
(SPT, symmetry & symmetry breaking)
anyonic excitation

error syndrome

Toric code

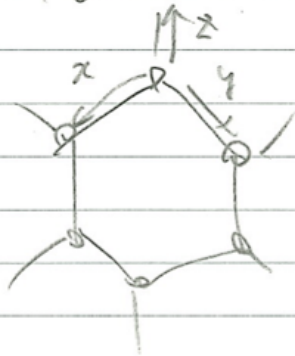
Kitev model

classical repetition code

Ising model (not topologically ordered)

\rightarrow SPT

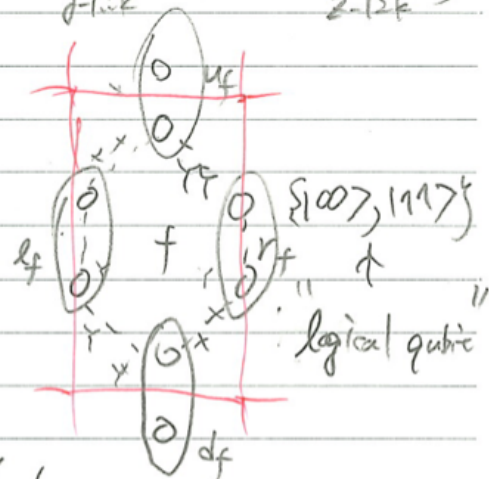
o Kitaev's compass model, (Kitaev Ann. Phys. '06)



$$H_{h.c.} = -J_x \sum_{x\text{-link}} X_i X_j - J_y \sum_{y\text{-link}} Y_i Y_j - J_z \sum_{z\text{-link}} Z_i Z_j$$

dimerization
 $J_x, J_y \ll J_z$

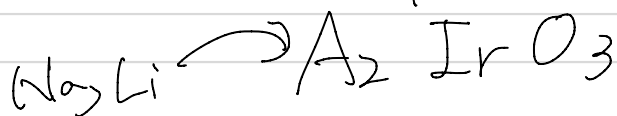
$$H_{\text{eff}} = - \frac{J_x^2 J_z^2}{16 |J_z|^3} \sum \bar{Y}_e \bar{Y}_f \bar{Z}_u \bar{Z}_d$$



↑
 Kitaev toric code model

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \bar{Z} = \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$$

Kitaev - Heisenberg model:
 Chaloupka et al PRL '10



- classification of topological stabilizer code

Yoshida Ann Phys '11
 Bombin NJP '12

- thermal stability

2D Bravyi - Terhal NJP '09
 3D Yoshida Ann Phys '11

