

若手のための量子情報基礎セミナー

量子計算の基礎

効率よく記述できるもの+α

前編

藤井 啓祐

京都大学 白眉センター / 大学院情報学研究科



目次

✓ 量子計算

Pauli演算子, ブロッホ球, Clifford演算子, non-Clifford演算,
Solovay-Kitaevアルゴリズム, 直積空間, CNOT演算, 万能量子計算

✓ スタビライザー形式

✓ 測定型量子計算

量子状態

◆量子ビット

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$(|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}, \quad |-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2})$$

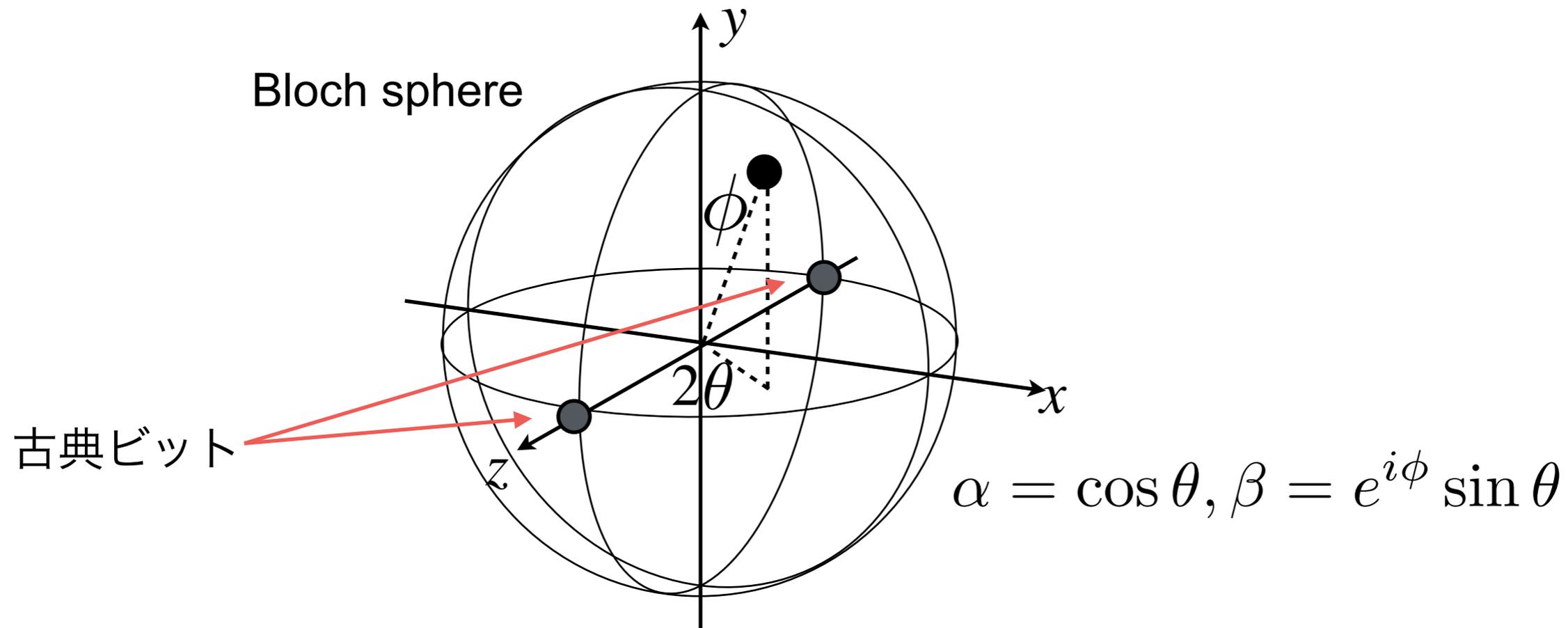
量子状態

◆量子ビット

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$(|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}, \quad |-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2})$$



Pauli演算子

◆ Pauli行列

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

- 反可換 (anticommute) : $ZX = -XZ$
- $XZ = iY$

Pauli演算子

◆ Pauli行列

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

- 反可換 (anticommute) : $ZX = -XZ$
- $XZ = iY$

◆ qubitに対する作用

$$X|0\rangle = |1\rangle \quad X|1\rangle = |0\rangle \quad (\text{bit-flip})$$

$$Z|0\rangle = |0\rangle \quad Z|1\rangle = -|1\rangle \quad (\text{phase-flip})$$

$$Y|0\rangle = i|1\rangle \quad Y|1\rangle = -i|0\rangle \quad (\text{bit\&phase-flip + global phase})$$

Pauli演算子

◆ Pauli行列

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

- 反可換 (anticommute) : $ZX = -XZ$
- $XZ = iY$

◆ qubitに対する作用

$$X|0\rangle = |1\rangle \quad X|1\rangle = |0\rangle \quad (\text{bit-flip})$$

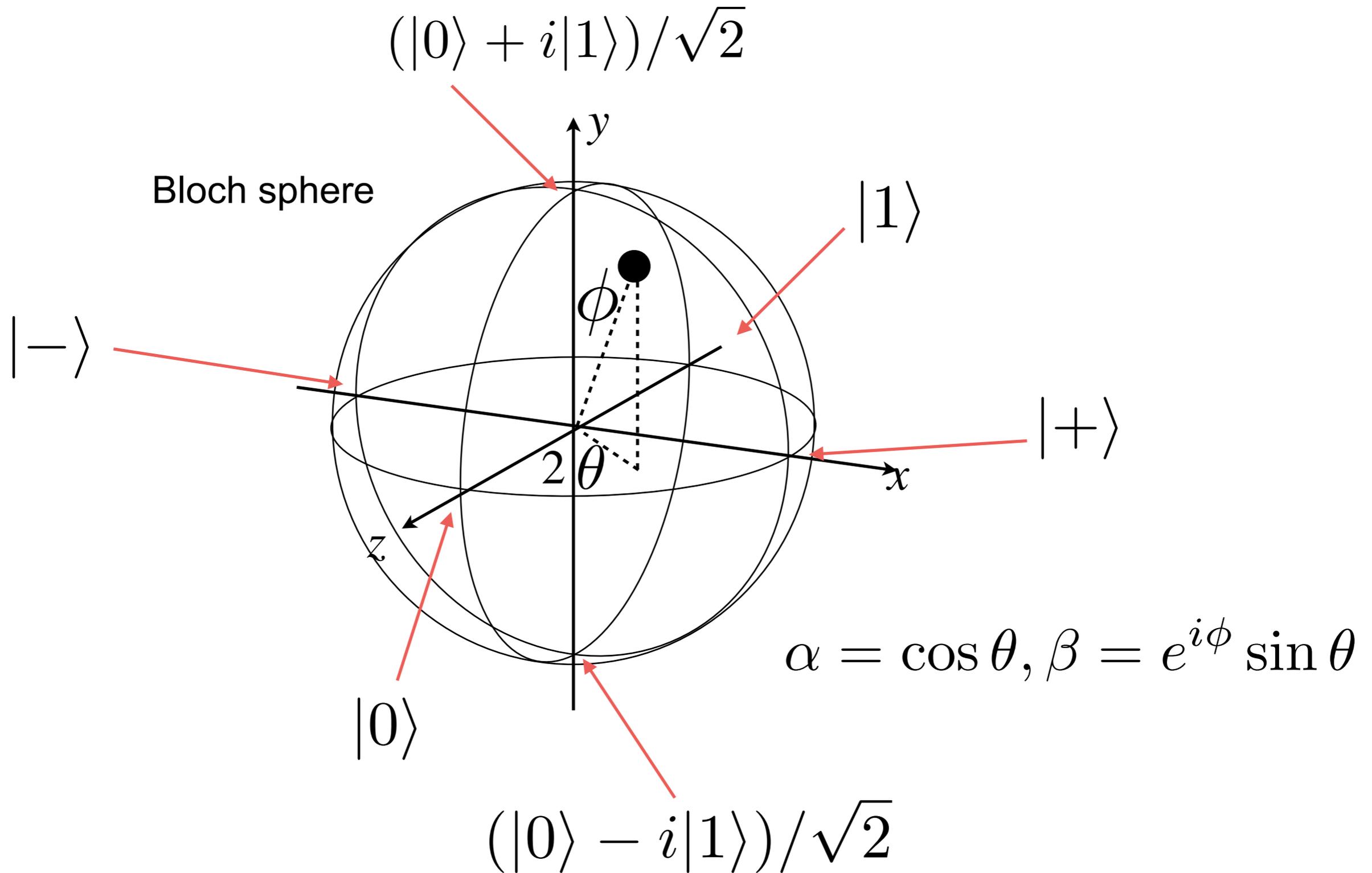
$$Z|0\rangle = |0\rangle \quad Z|1\rangle = -|1\rangle \quad (\text{phase-flip})$$

$$Y|0\rangle = i|1\rangle \quad Y|1\rangle = -i|0\rangle \quad (\text{bit\&phase-flip} + \text{global phase})$$

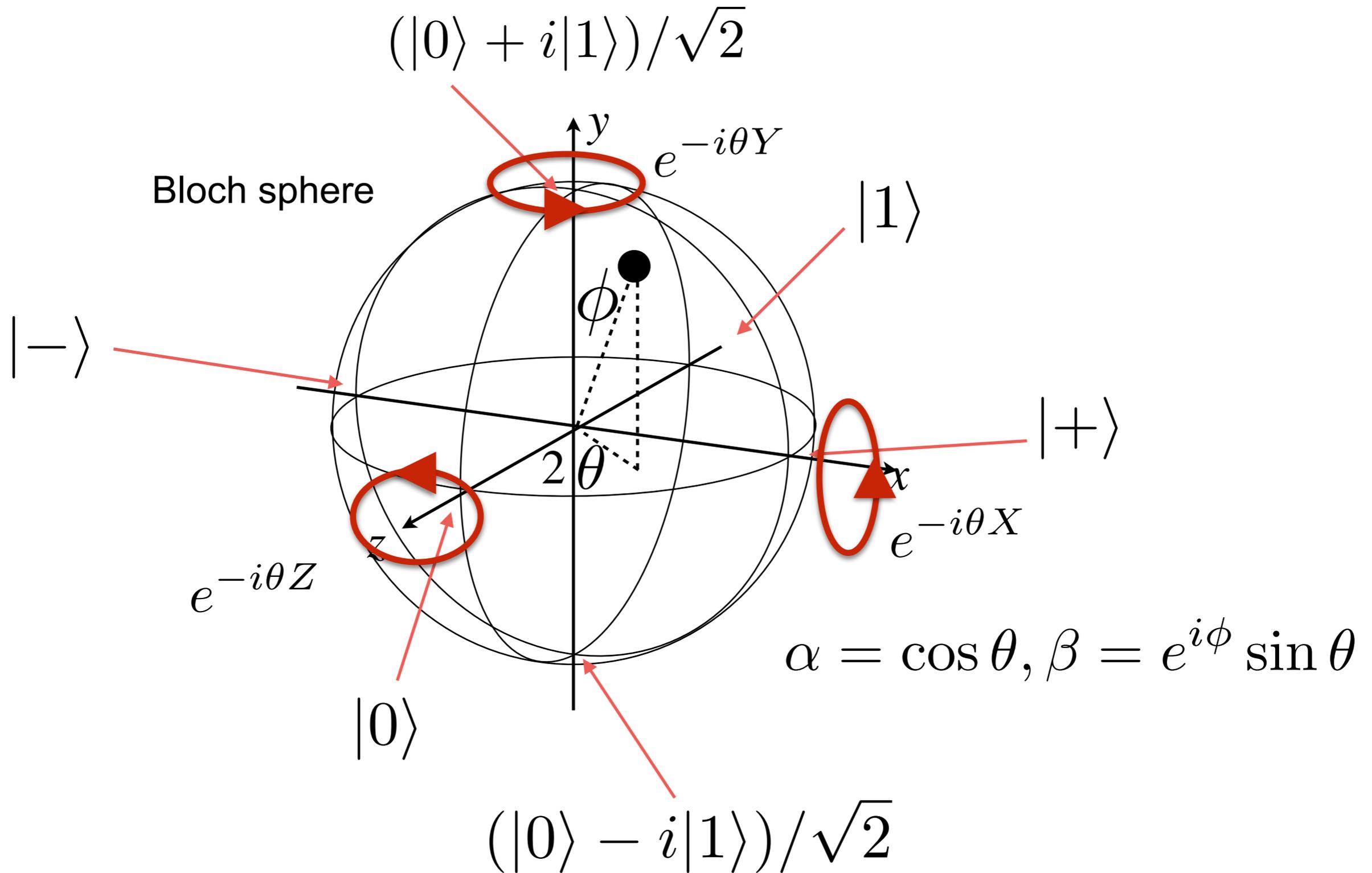
◆ Pauli行列の固有状態 (Pauli basis)

$$\begin{array}{cc} Z \rightarrow |0\rangle, |1\rangle & X \rightarrow |+\rangle \equiv (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}, |-\rangle \equiv (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2} \\ Z \text{ basis} & X \text{ basis} \end{array}$$

ブロッホ球



ブロッホ球



Clifford演算

Clifford演算：Pauli 演算子を Pauli 演算子にマップ

$$A = UBU^\dagger$$

↑ ↑
Pauli演算子

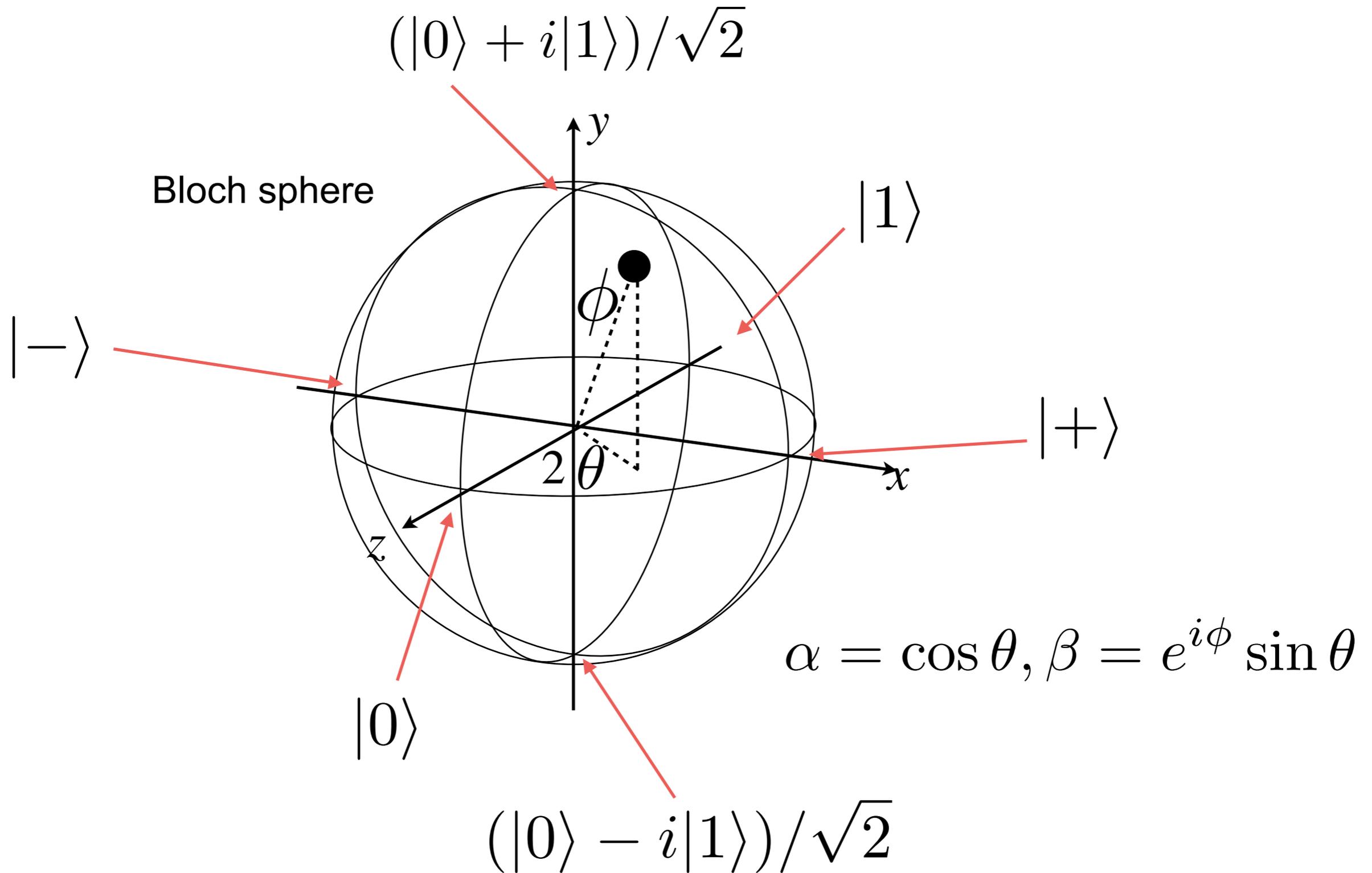
$$\text{---} \boxed{H} \text{---} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \boxed{HXH = Z}$$

Hadamard

$$\text{---} \boxed{S} \text{---} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad \boxed{SX S^\dagger = Y}$$

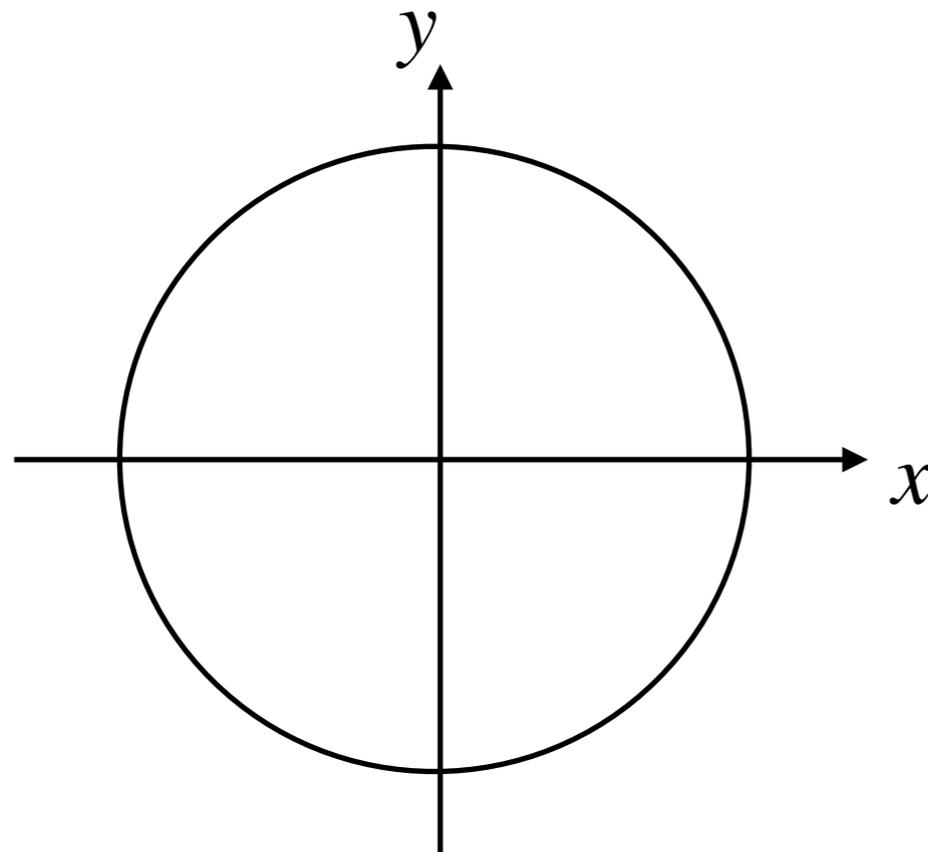
Phase

ブロッホ球



non-Clifford演算

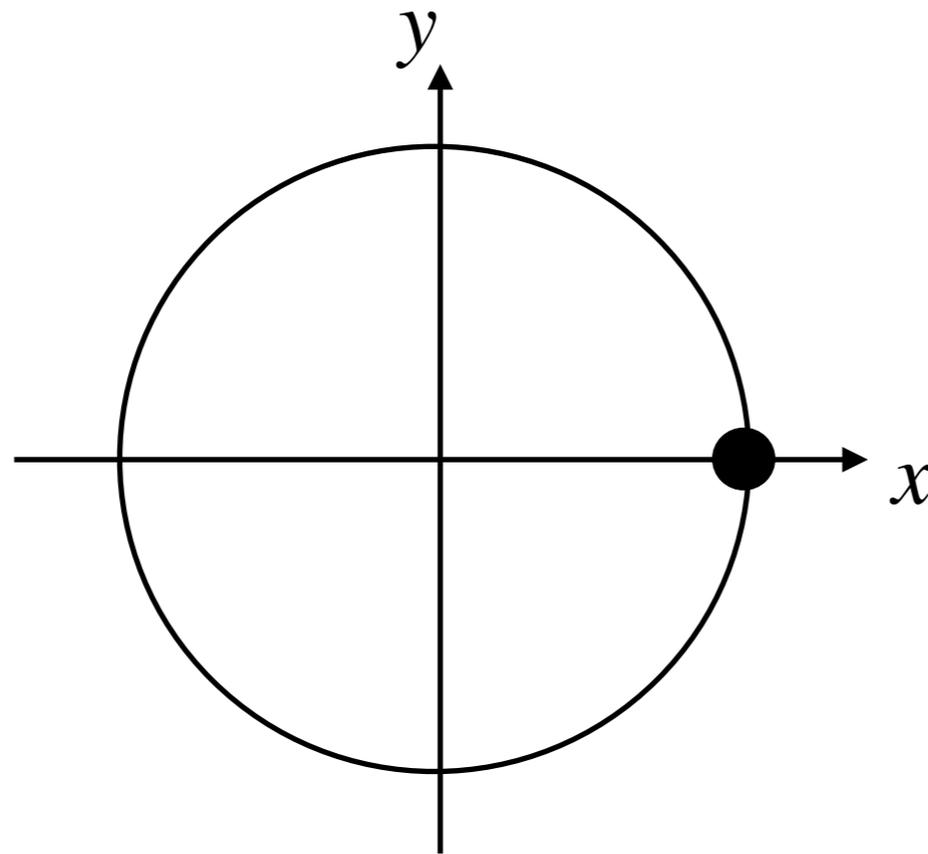
π の有理数倍の回転だと任意の角度の回転を実現できない。



任意の1量子ビット演算構成するためには
non-Clifford演算が必要。

non-Clifford演算

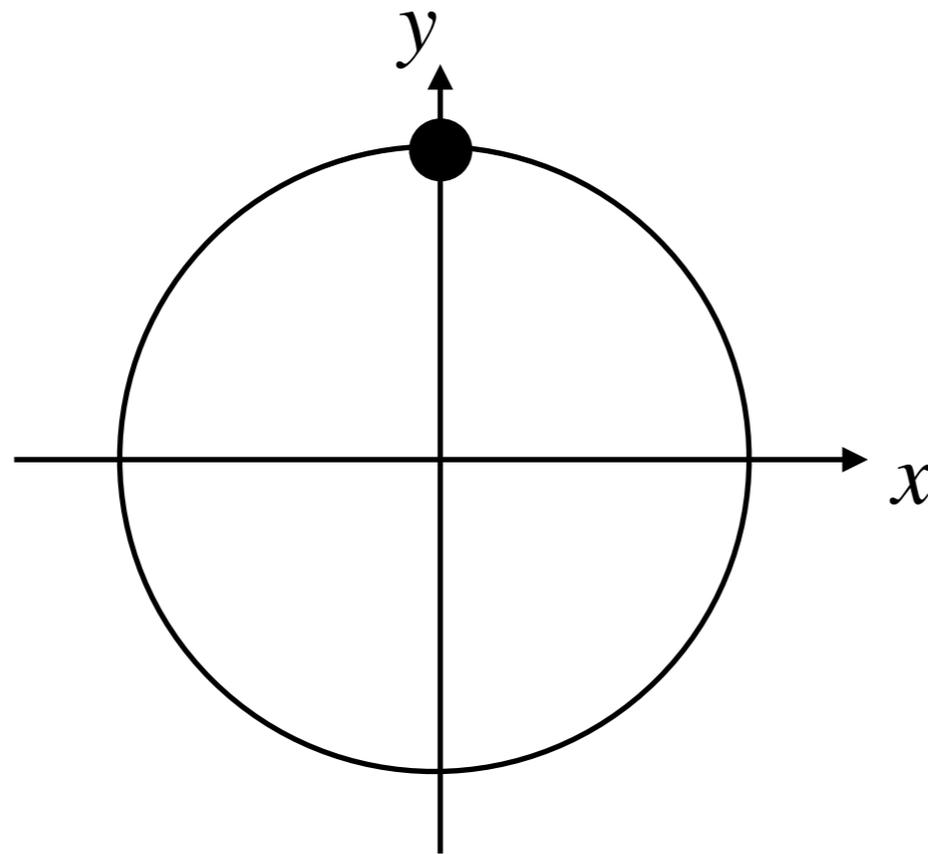
π の有理数倍の回転だと任意の角度の回転を実現できない。



任意の1量子ビット演算構成するためには
non-Clifford演算が必要。

non-Clifford演算

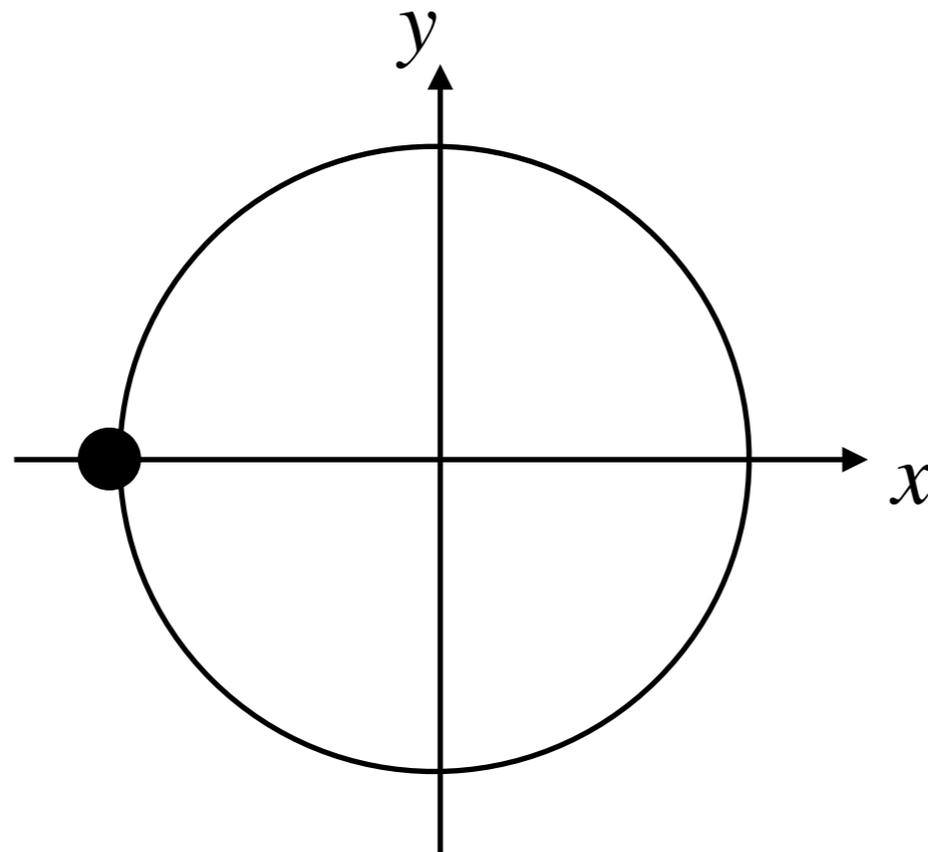
π の有理数倍の回転だと任意の角度の回転を実現できない。



任意の1量子ビット演算構成するためには
non-Clifford演算が必要。

non-Clifford演算

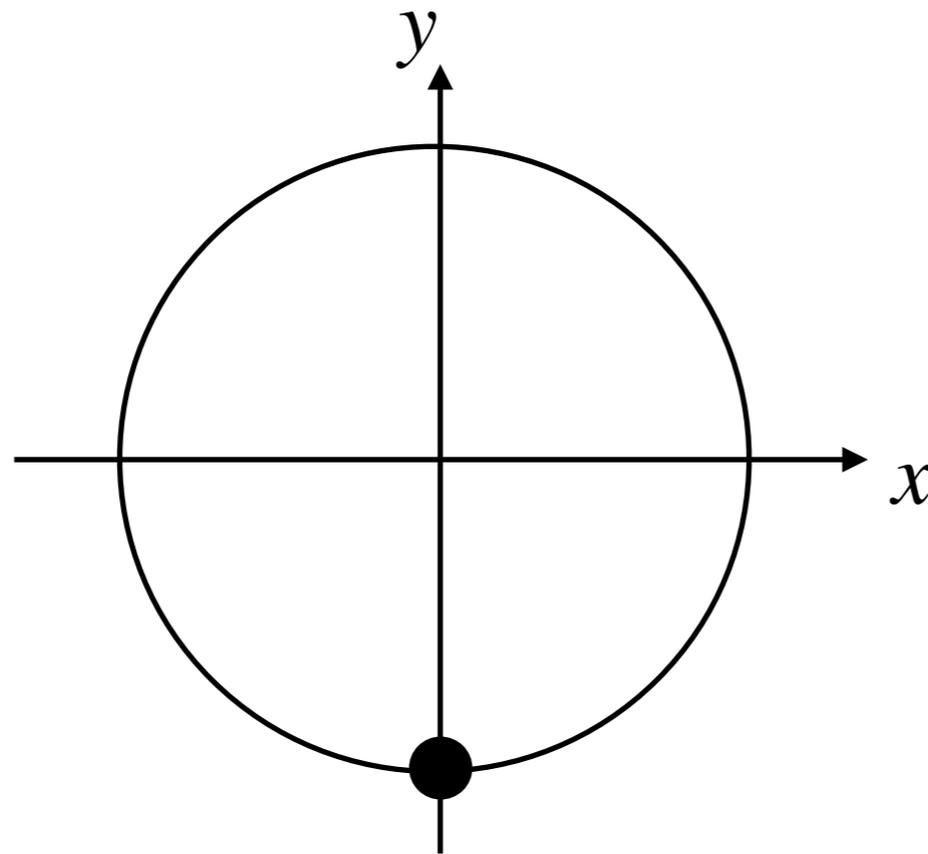
π の有理数倍の回転だと任意の角度の回転を実現できない。



任意の1量子ビット演算構成するためには
non-Clifford演算が必要。

non-Clifford演算

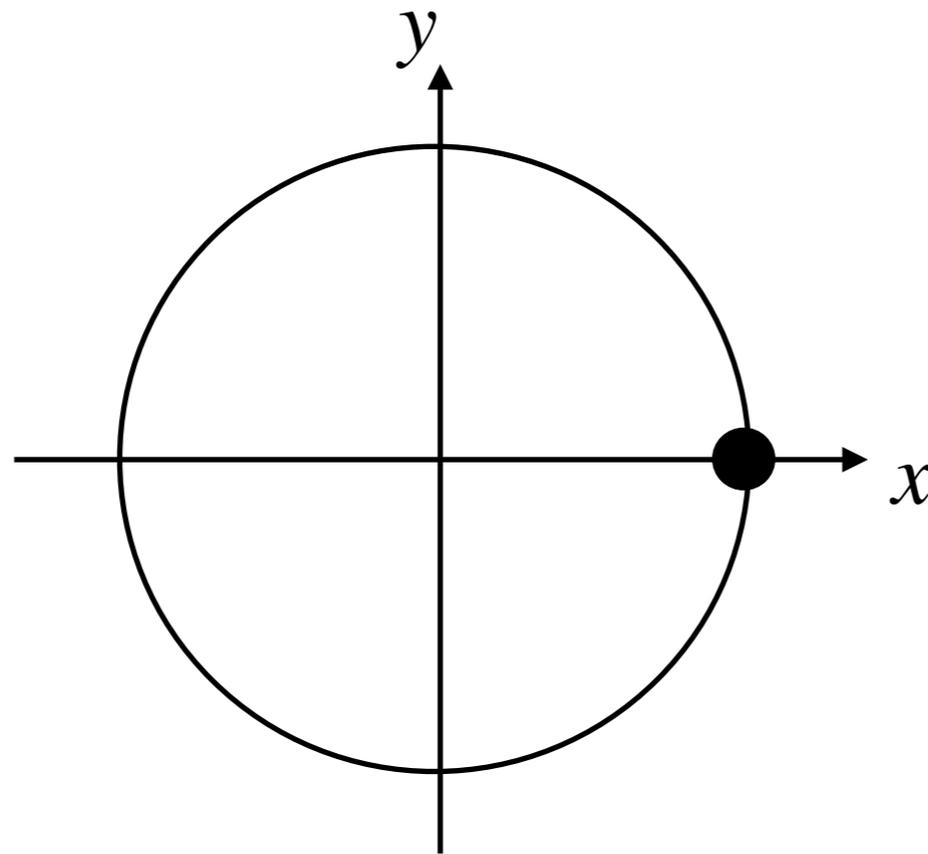
π の有理数倍の回転だと任意の角度の回転を実現できない。



任意の1量子ビット演算構成するためには
non-Clifford演算が必要。

non-Clifford演算

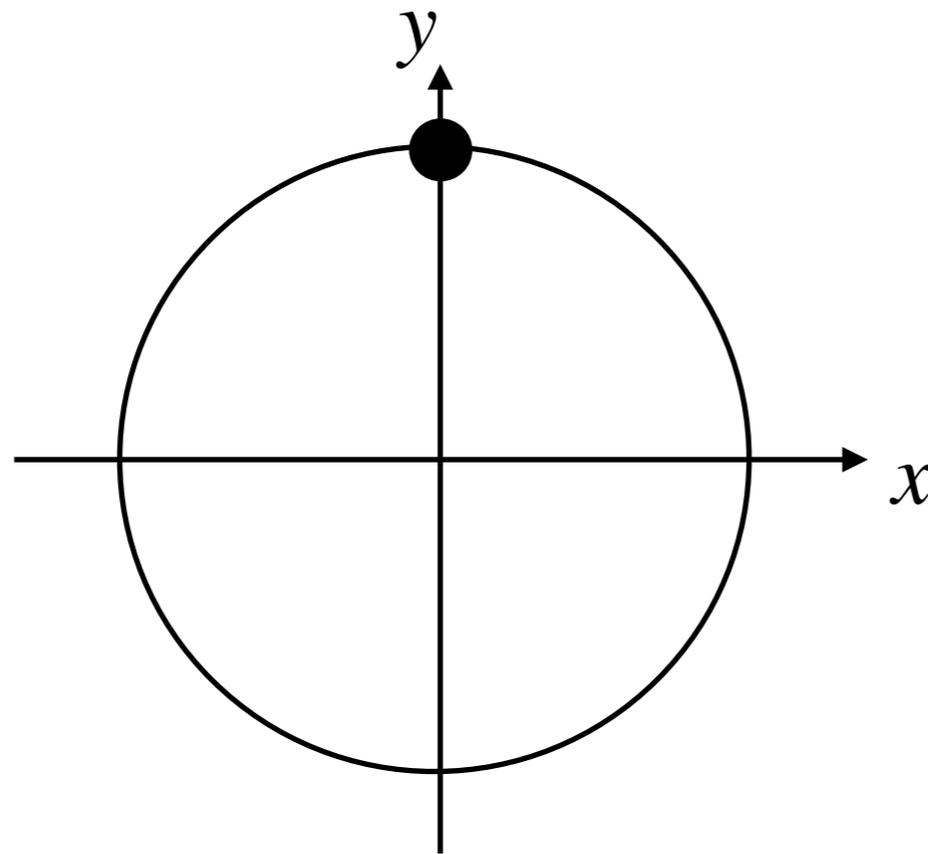
π の有理数倍の回転だと任意の角度の回転を実現できない。



任意の1量子ビット演算構成するためには
non-Clifford演算が必要。

non-Clifford演算

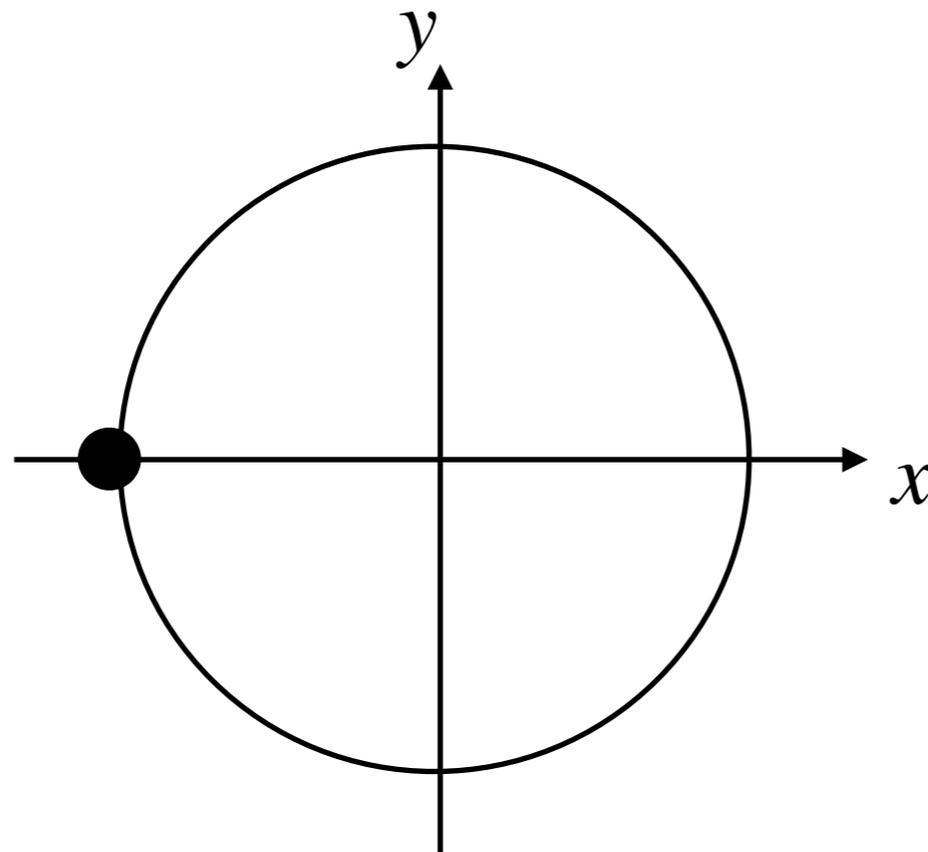
π の有理数倍の回転だと任意の角度の回転を実現できない。



任意の1量子ビット演算構成するためには
non-Clifford演算が必要。

non-Clifford演算

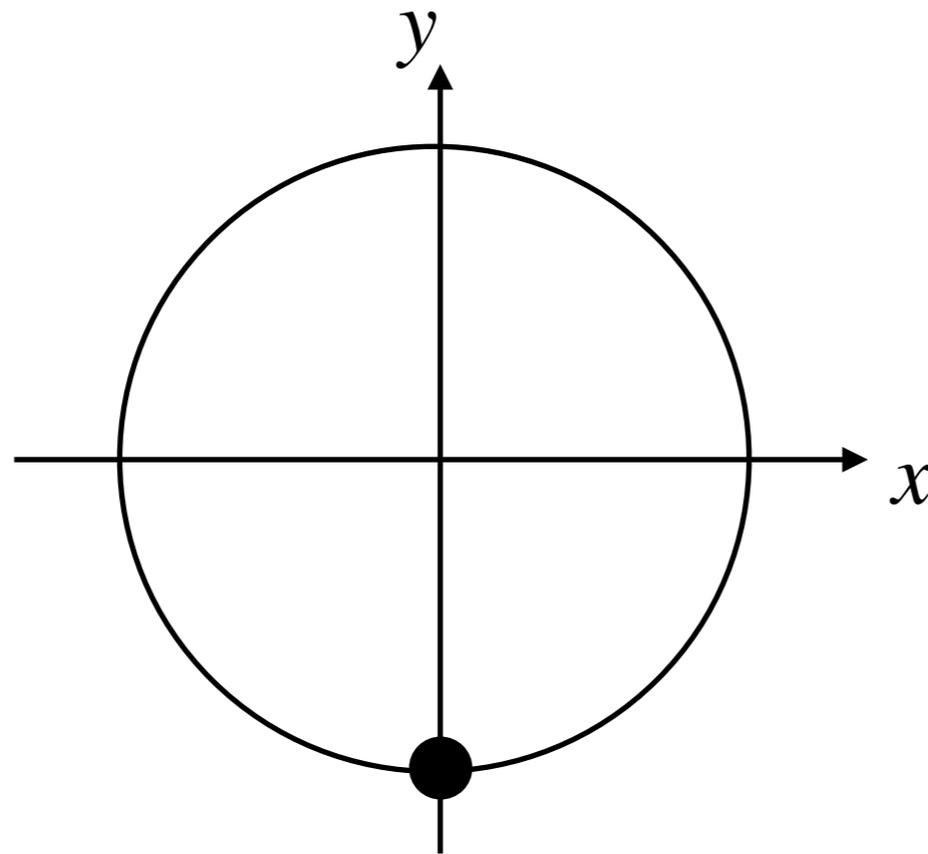
π の有理数倍の回転だと任意の角度の回転を実現できない。



任意の1量子ビット演算構成するためには
non-Clifford演算が必要。

non-Clifford演算

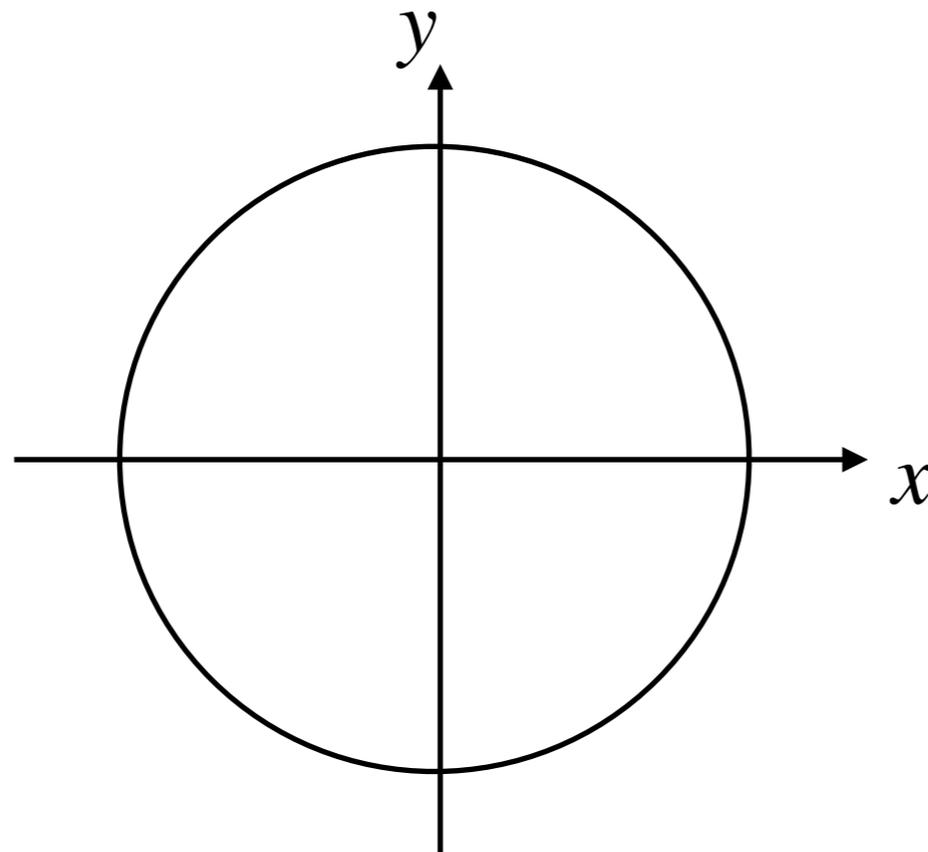
π の有理数倍の回転だと任意の角度の回転を実現できない。



任意の1量子ビット演算構成するためには
non-Clifford演算が必要。

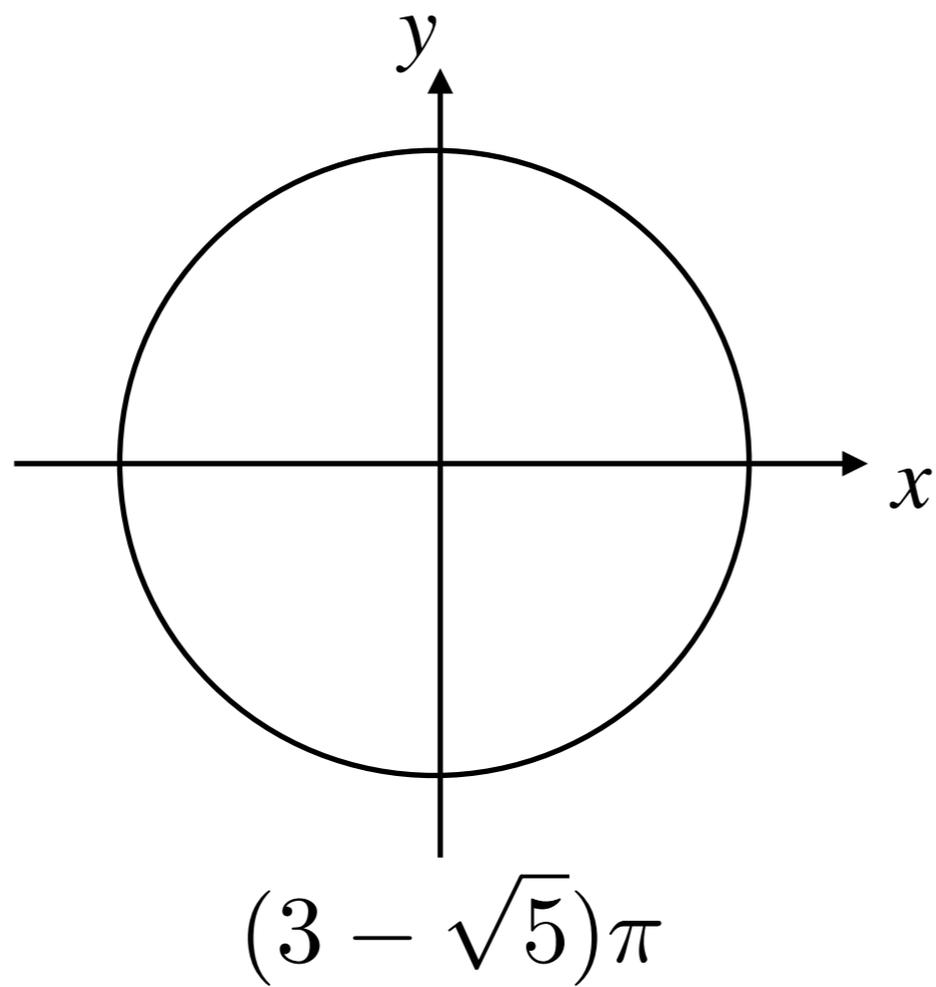
non-Clifford演算

π の有理数倍の回転だと任意の角度の回転を実現できない.

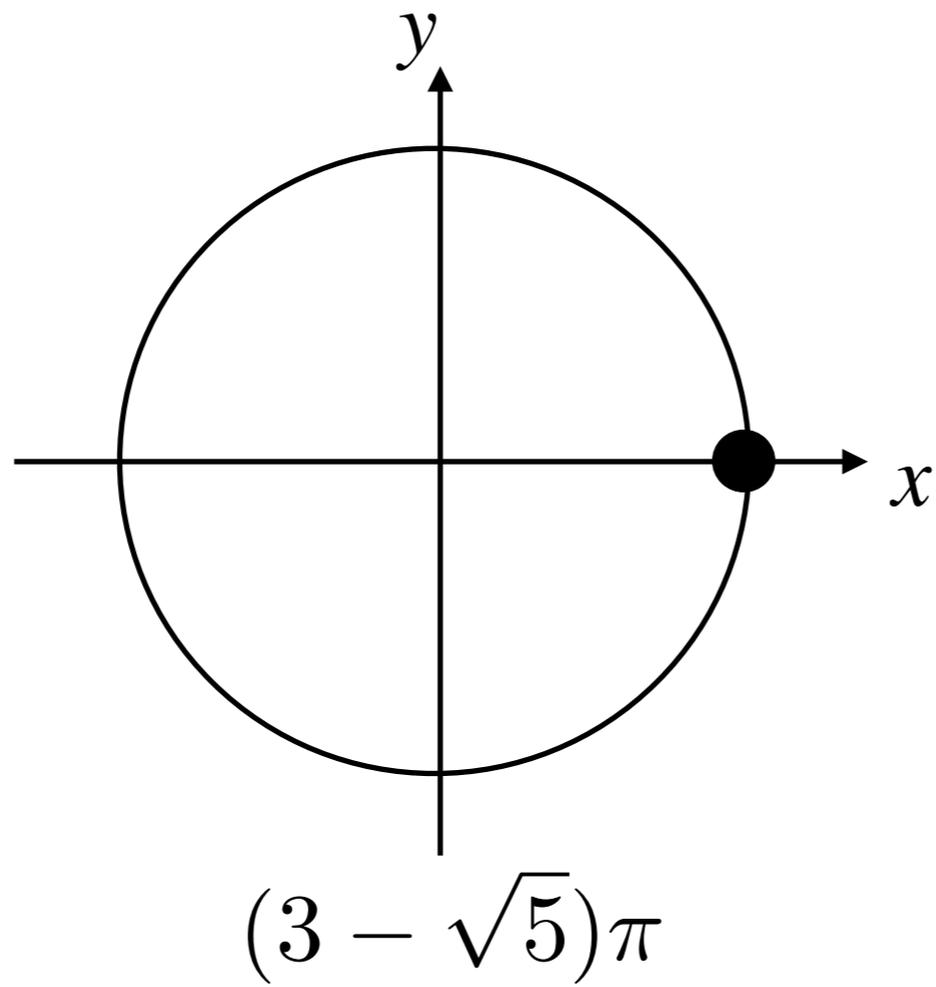


任意の1量子ビット演算構成するためには
non-Clifford演算が必要.

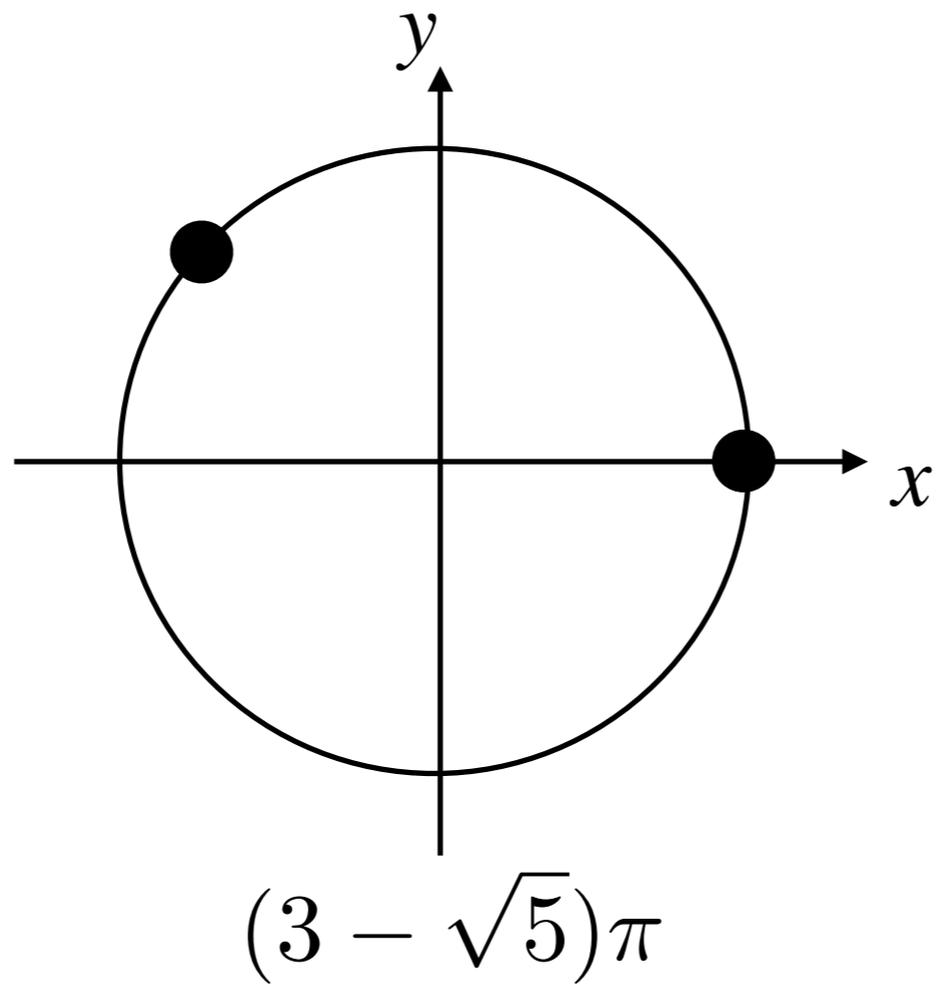
non-Clifford演算



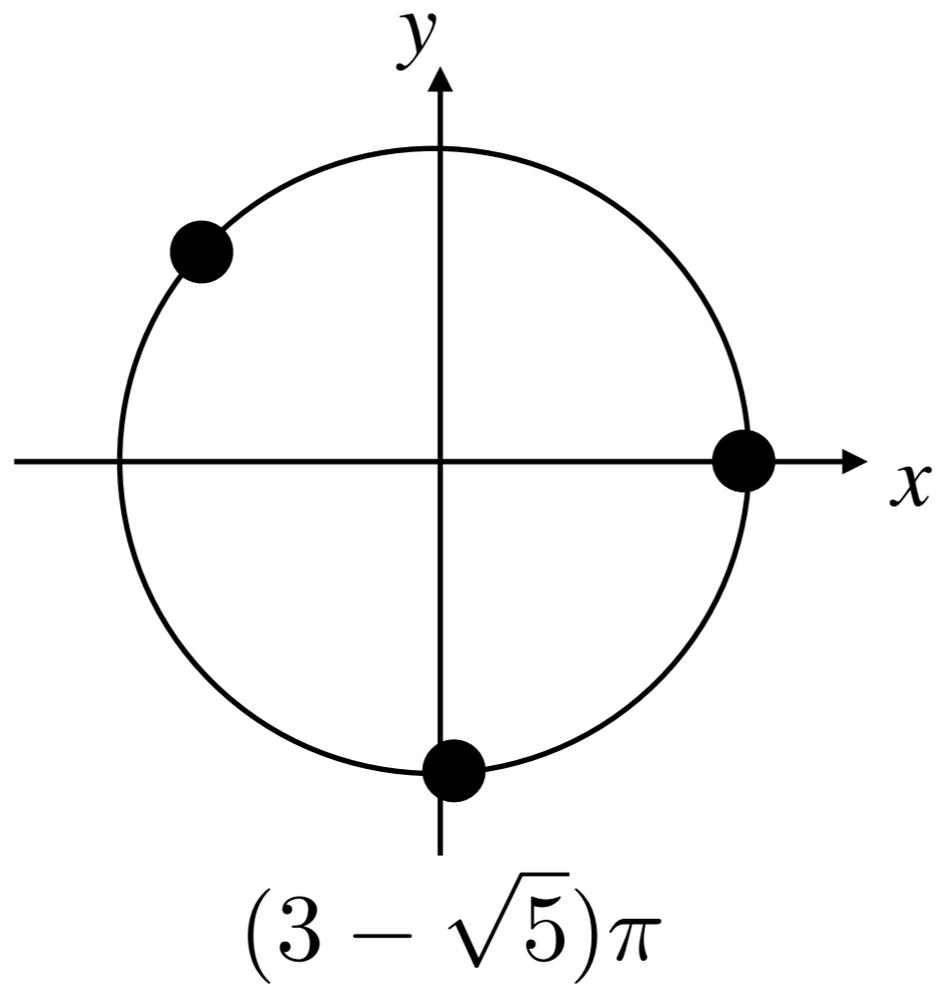
non-Clifford演算



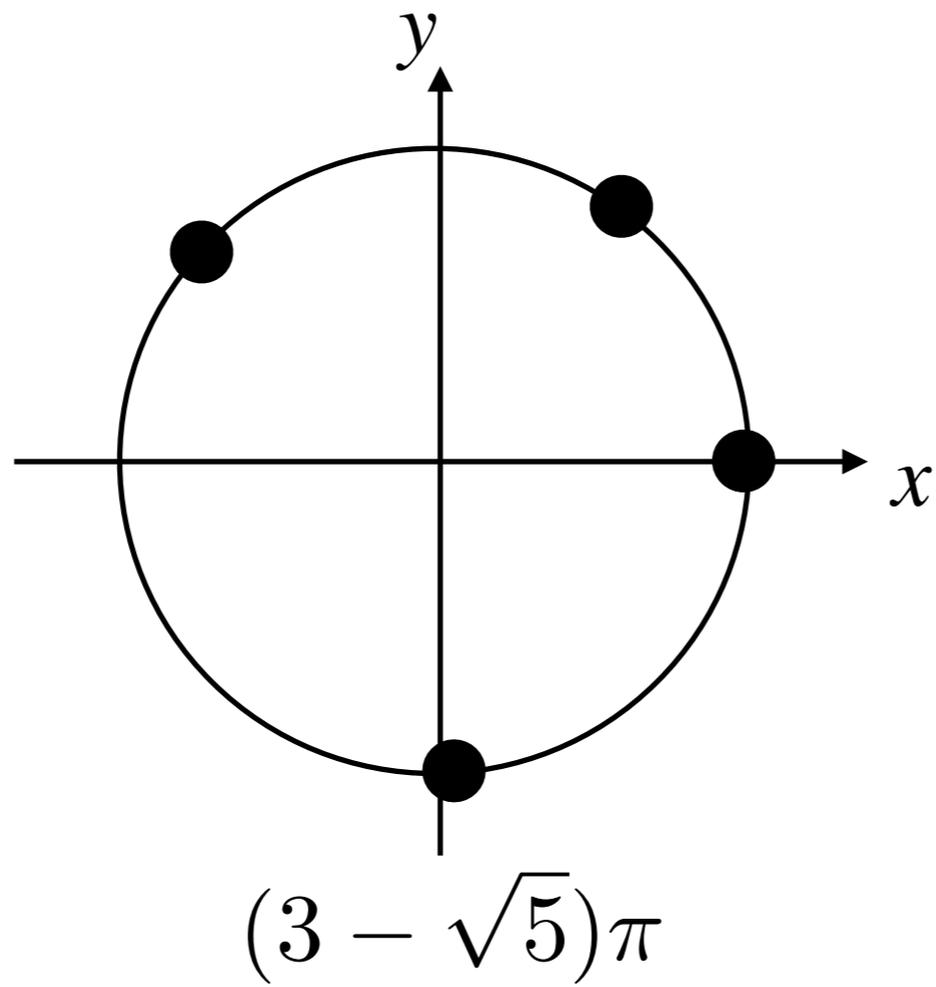
non-Clifford演算



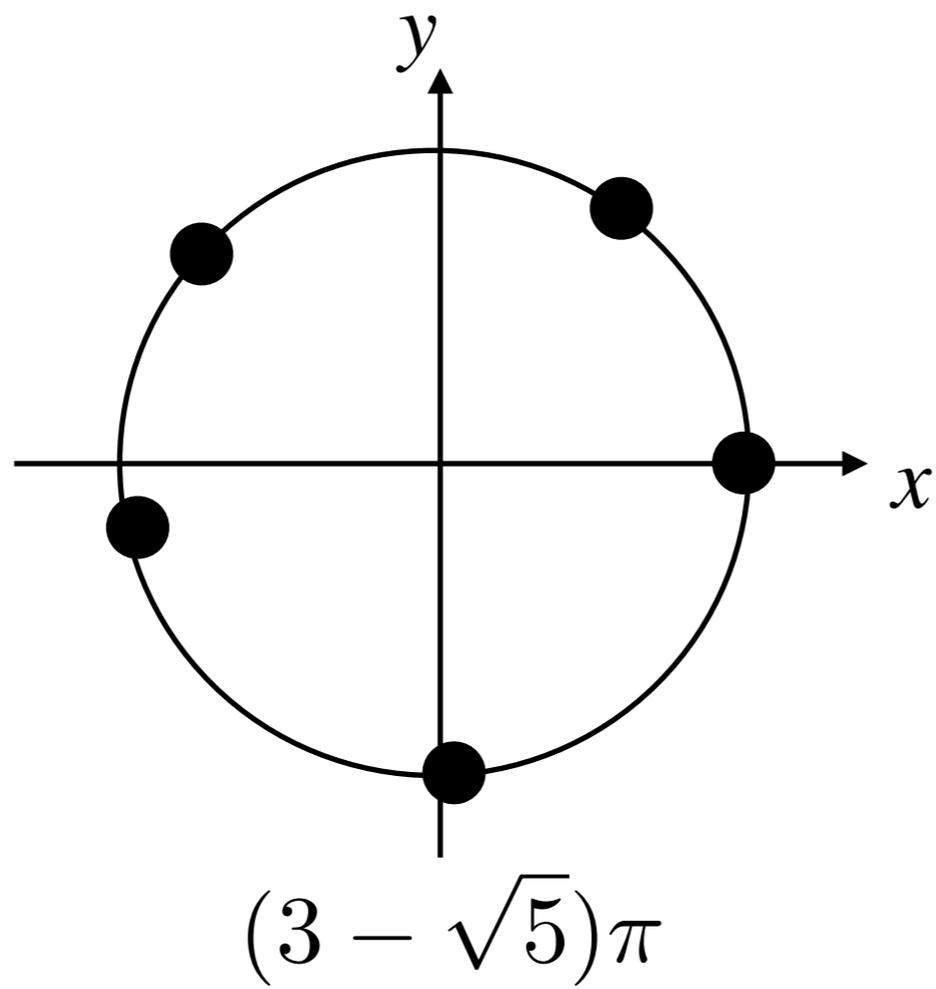
non-Clifford演算



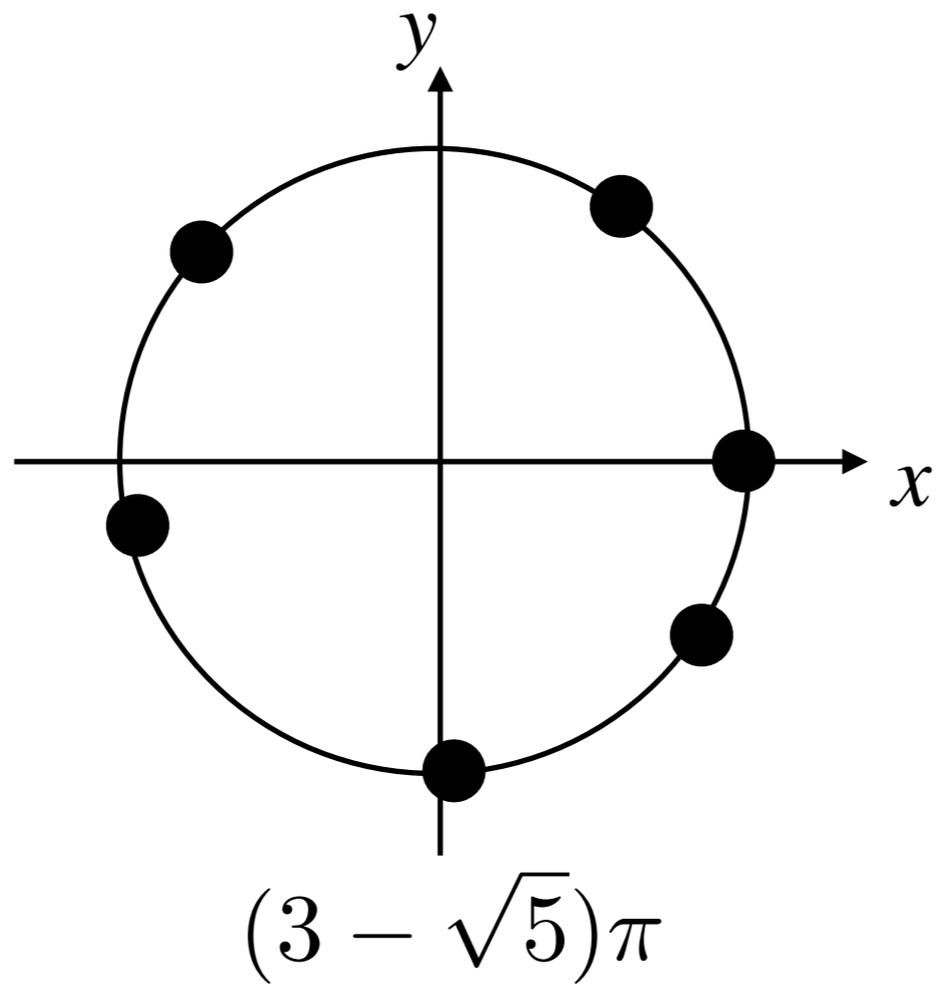
non-Clifford演算



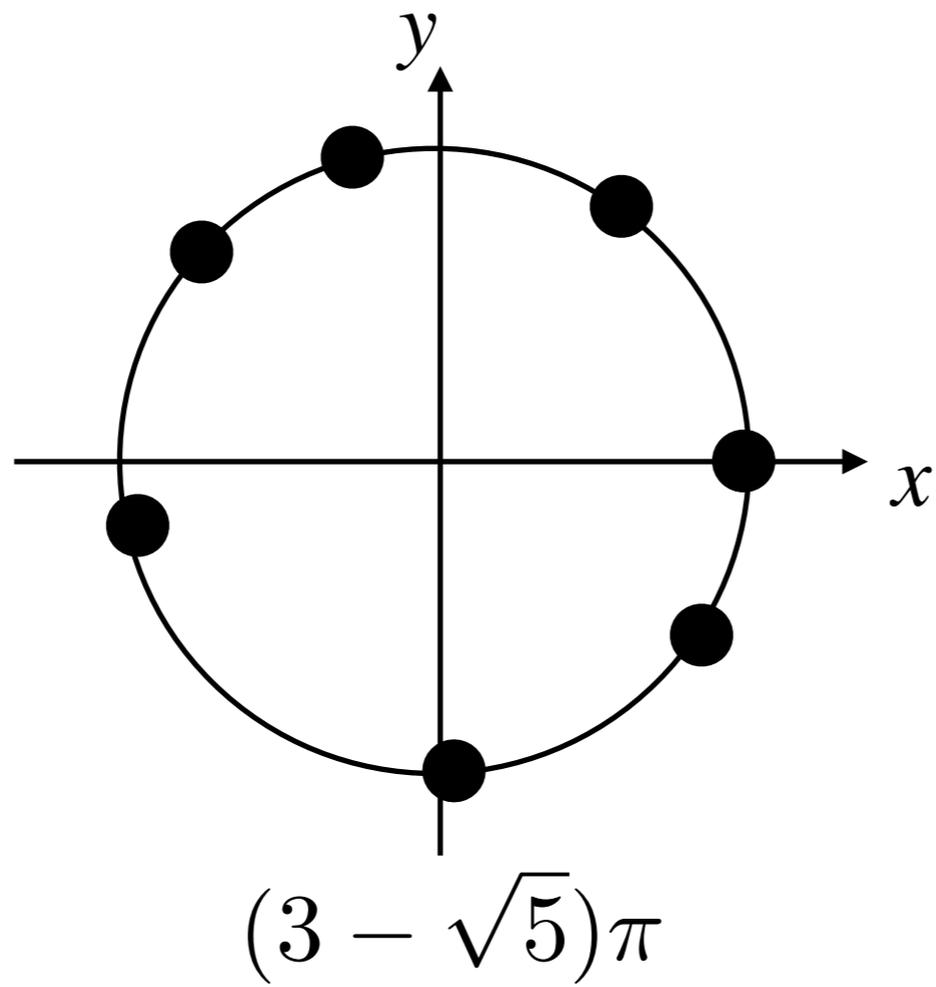
non-Clifford演算



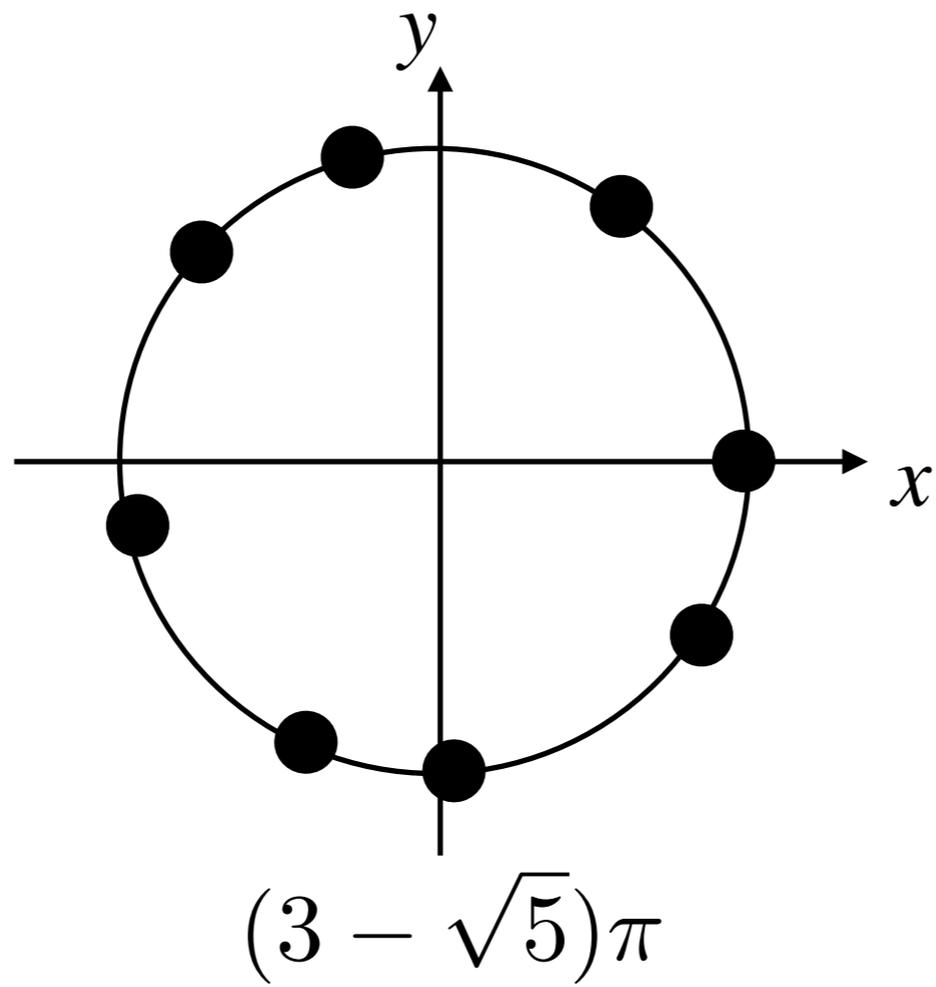
non-Clifford演算



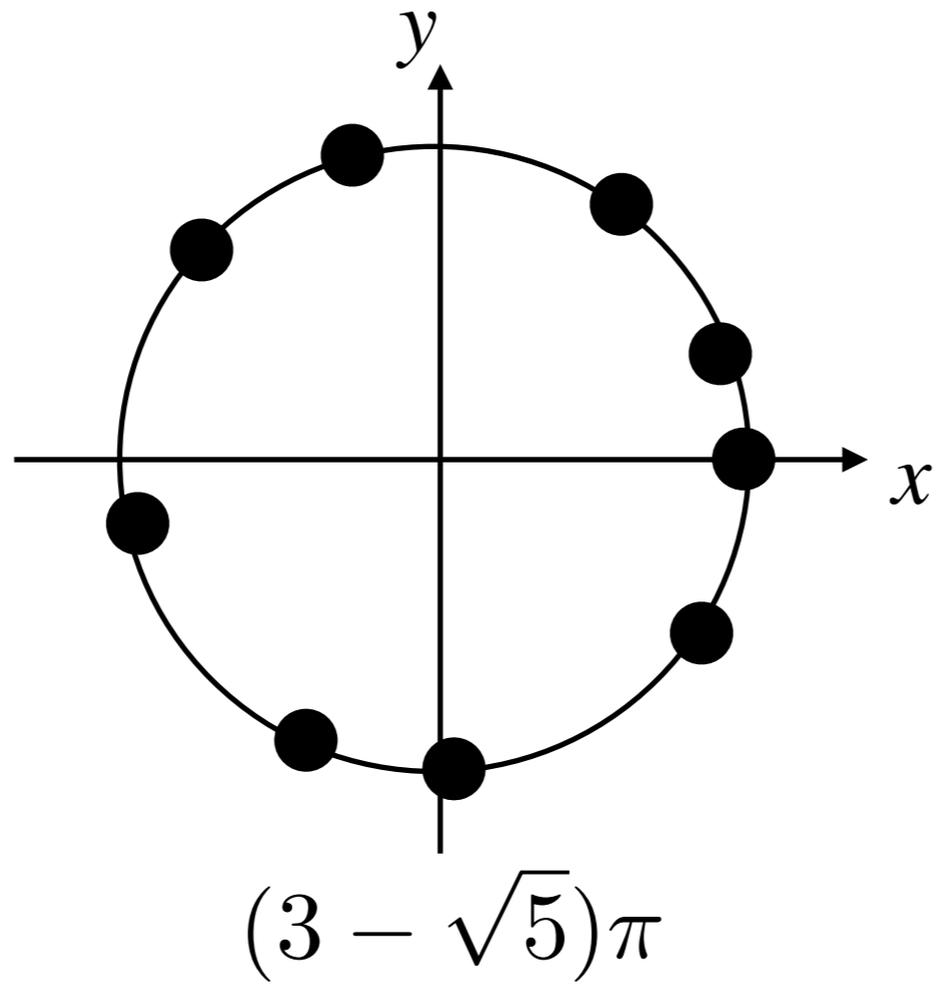
non-Clifford演算



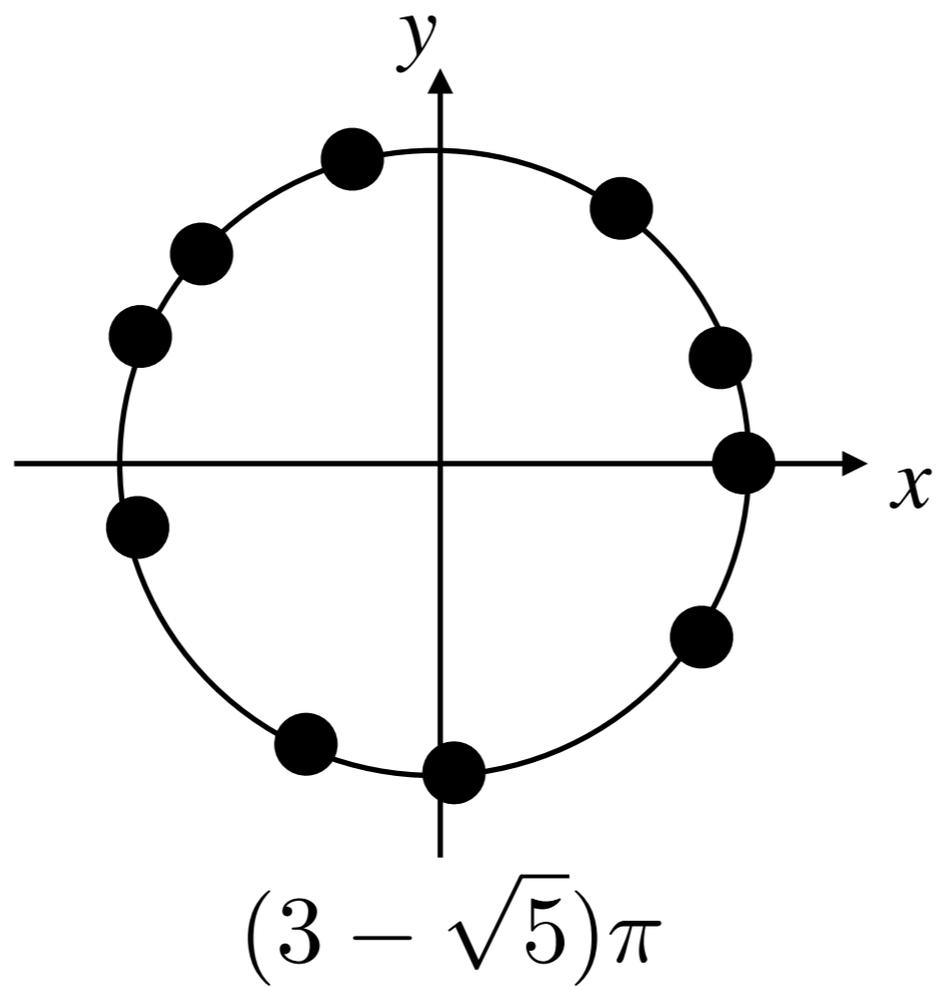
non-Clifford演算



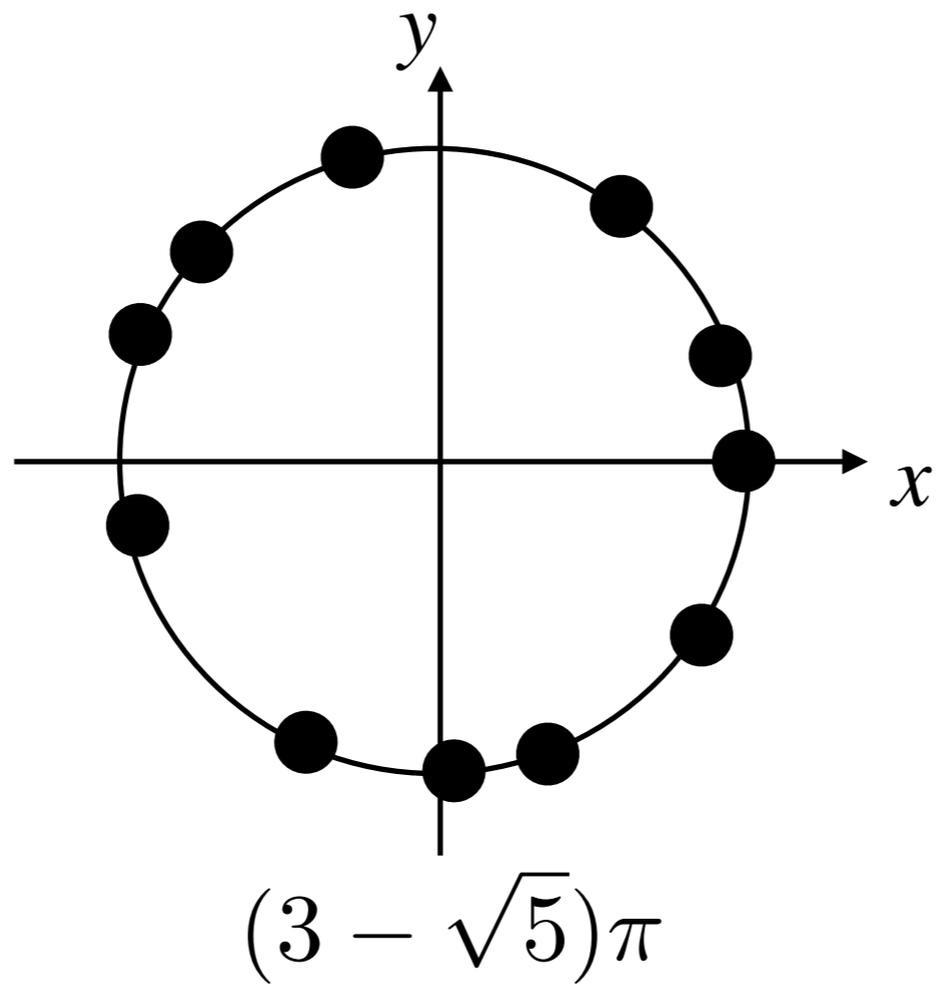
non-Clifford演算



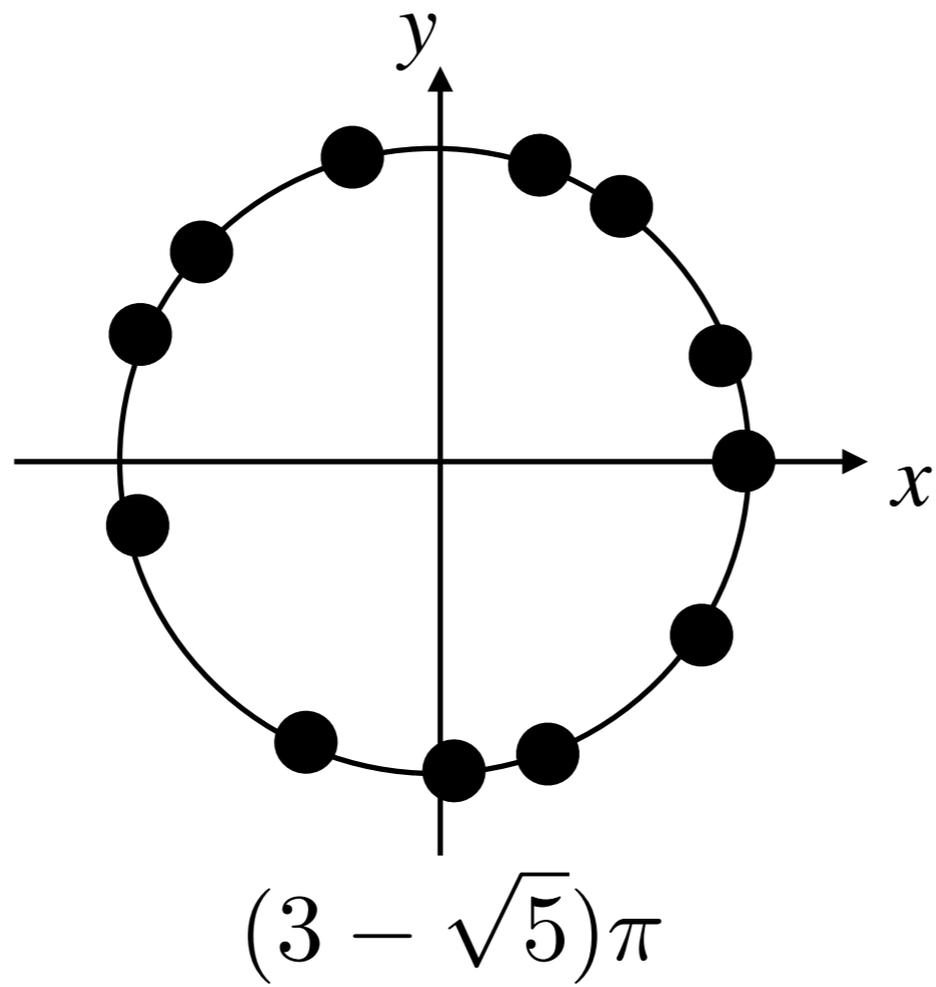
non-Clifford演算



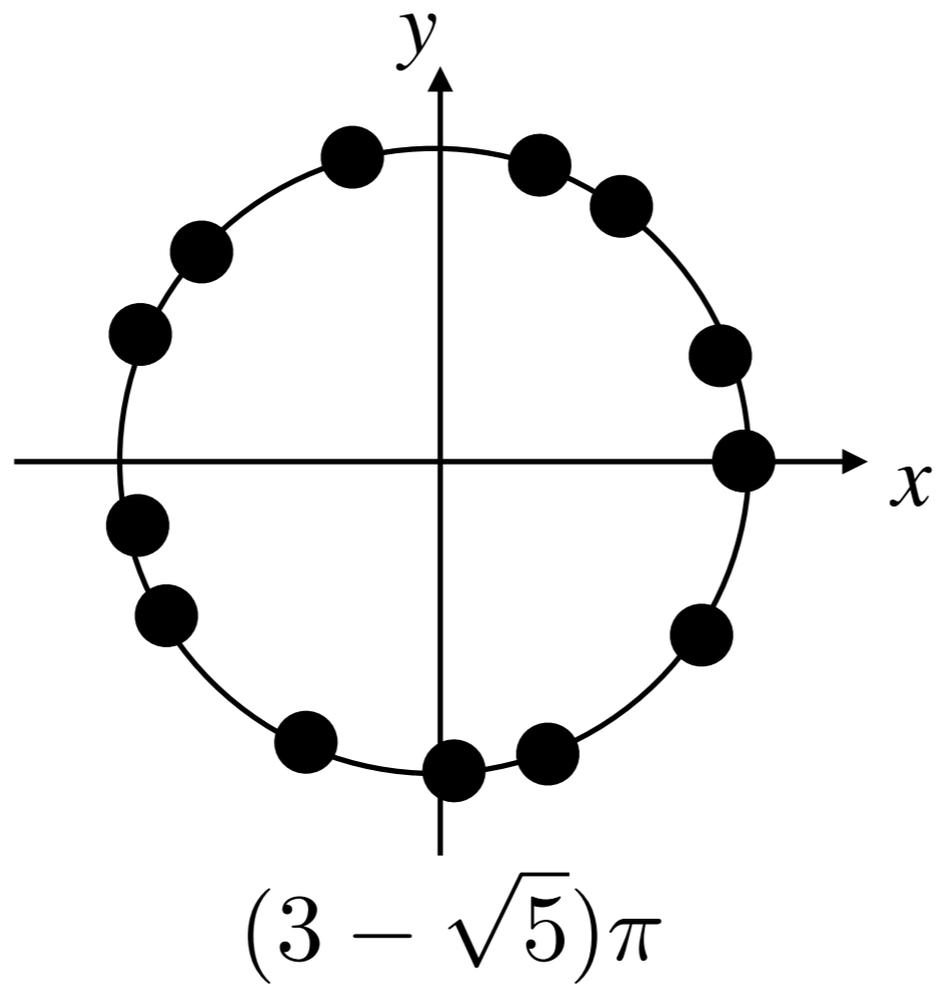
non-Clifford演算



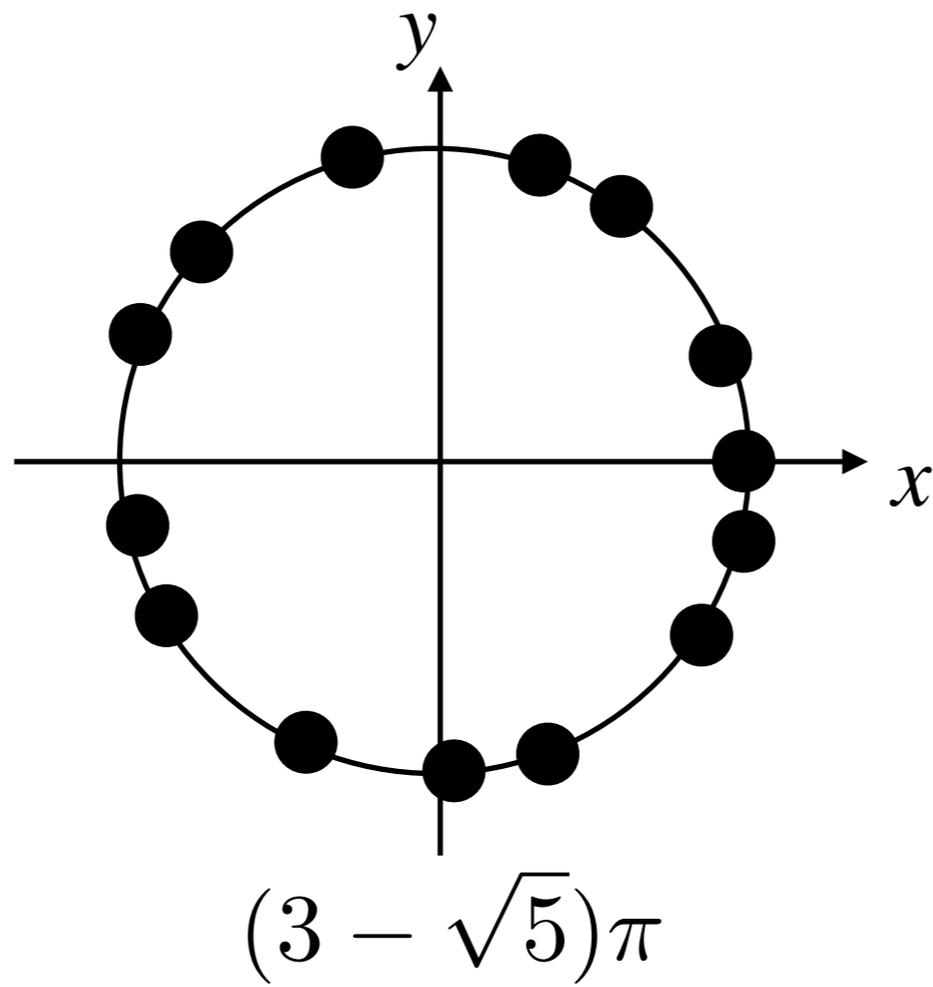
non-Clifford演算



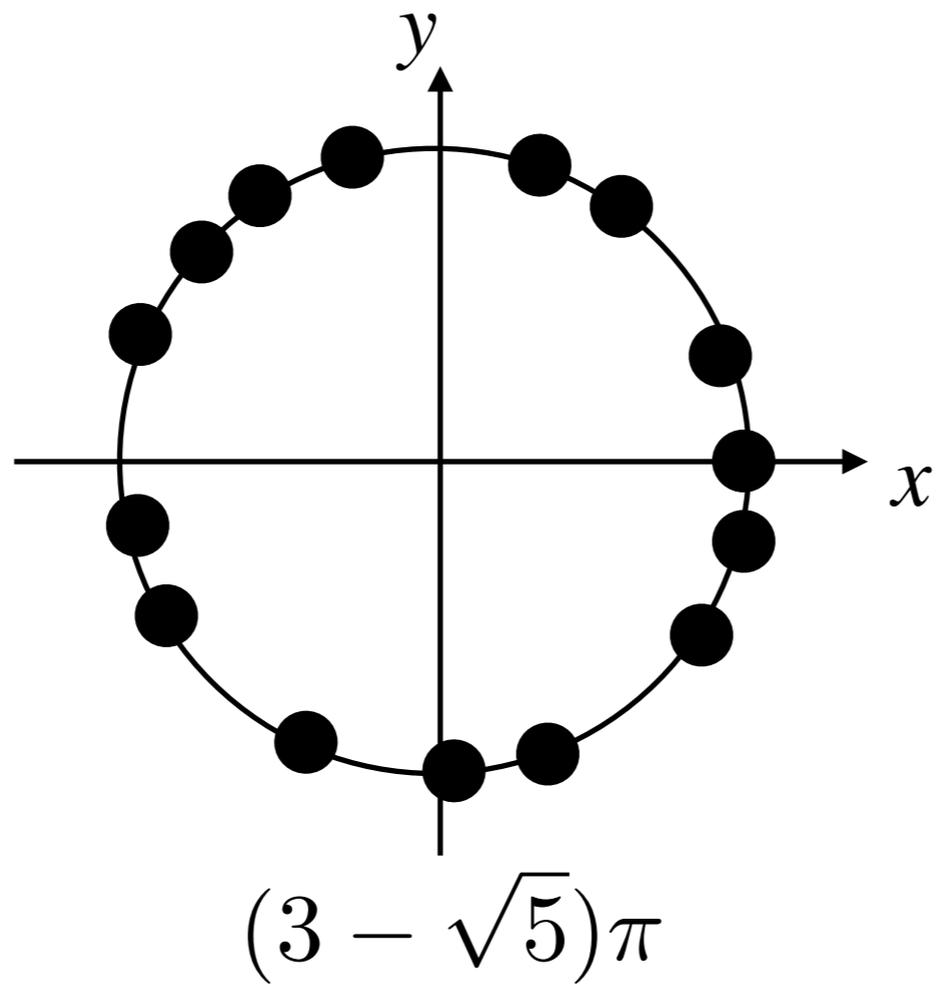
non-Clifford演算



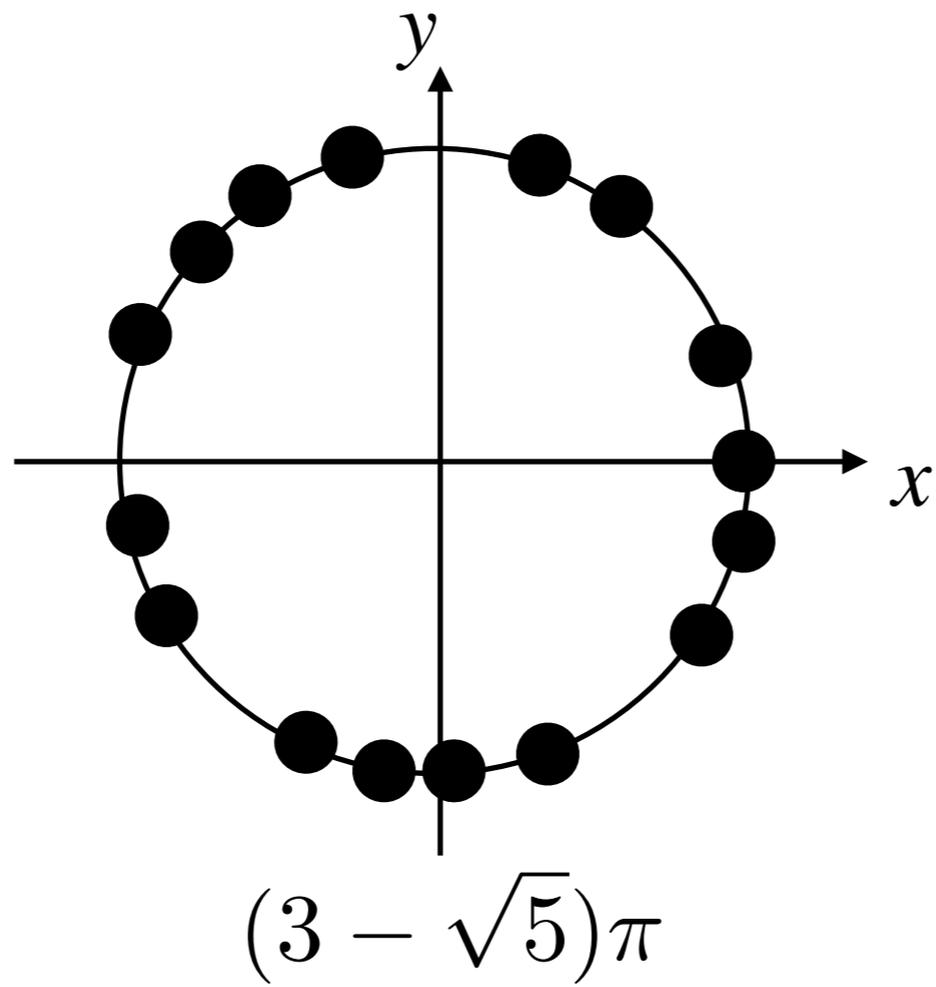
non-Clifford演算



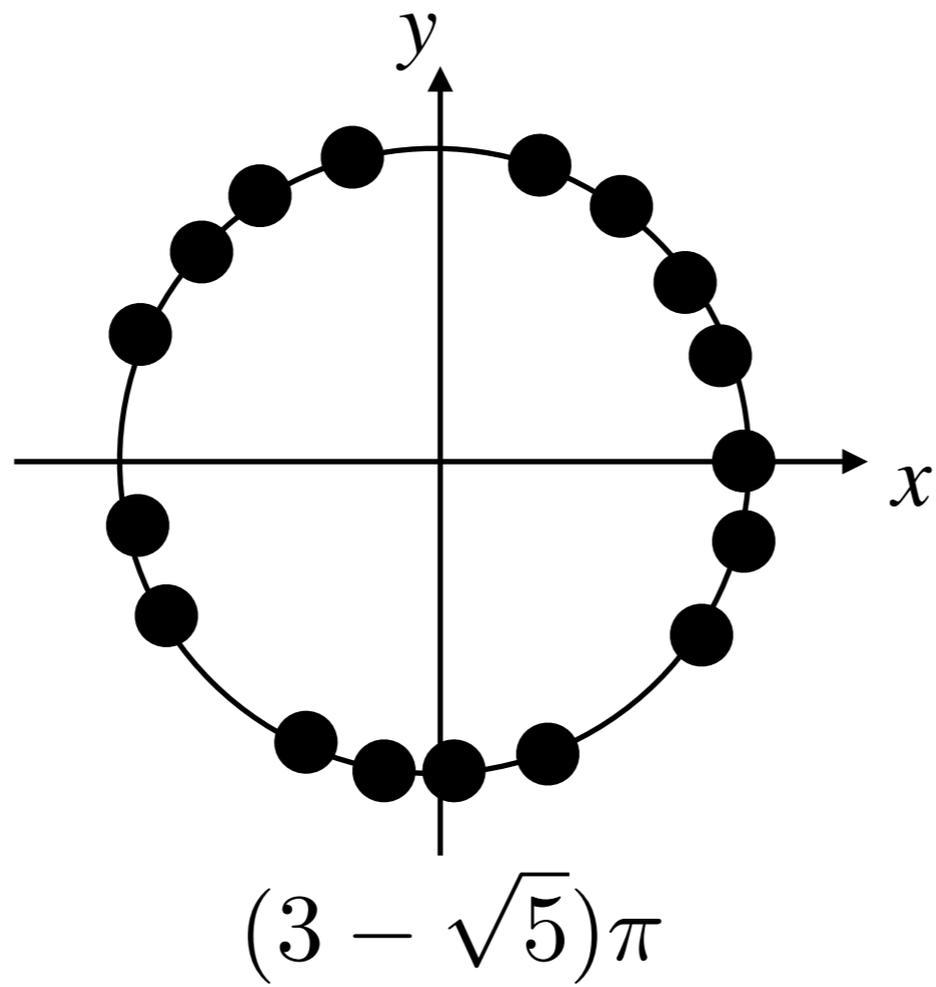
non-Clifford演算



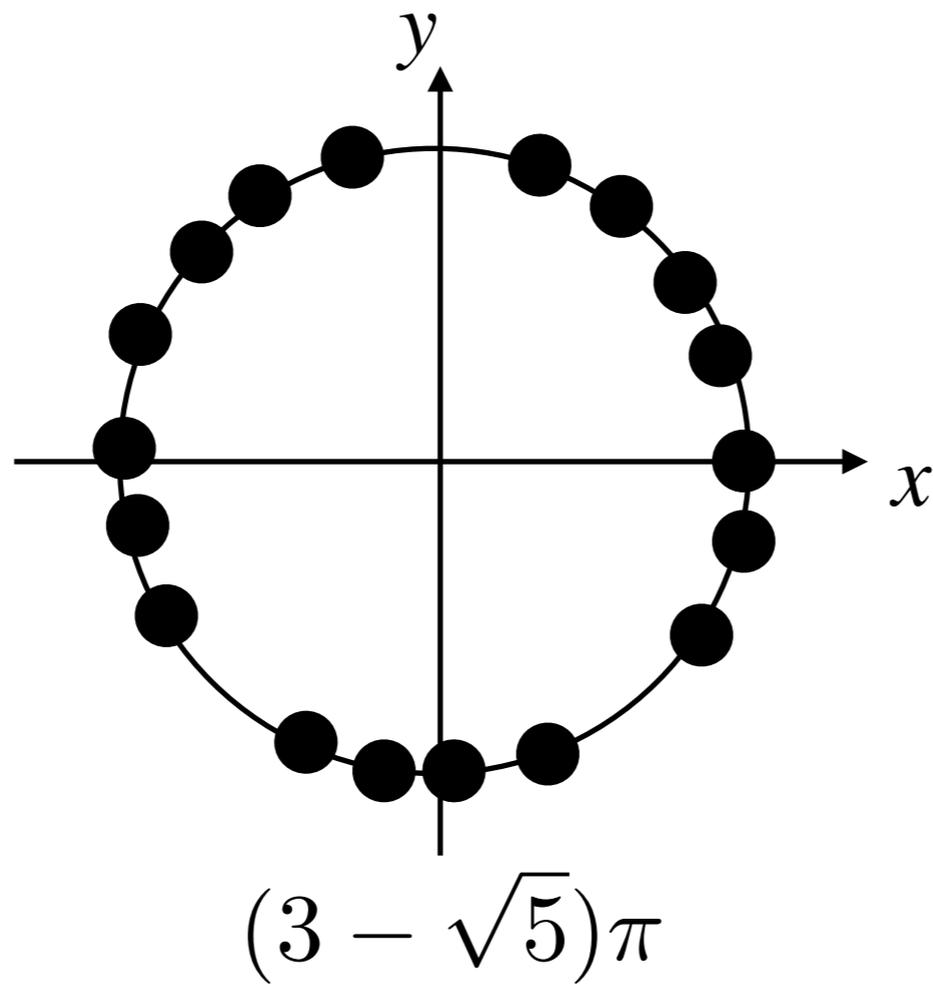
non-Clifford演算



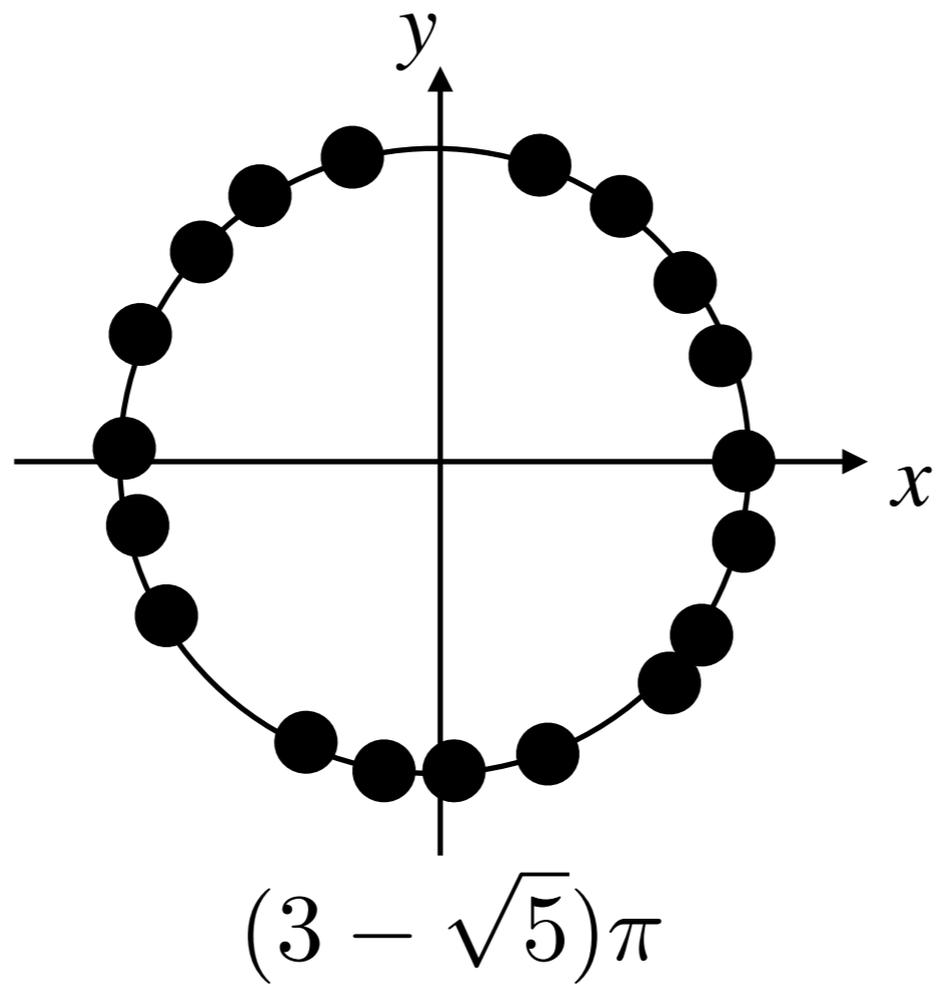
non-Clifford演算



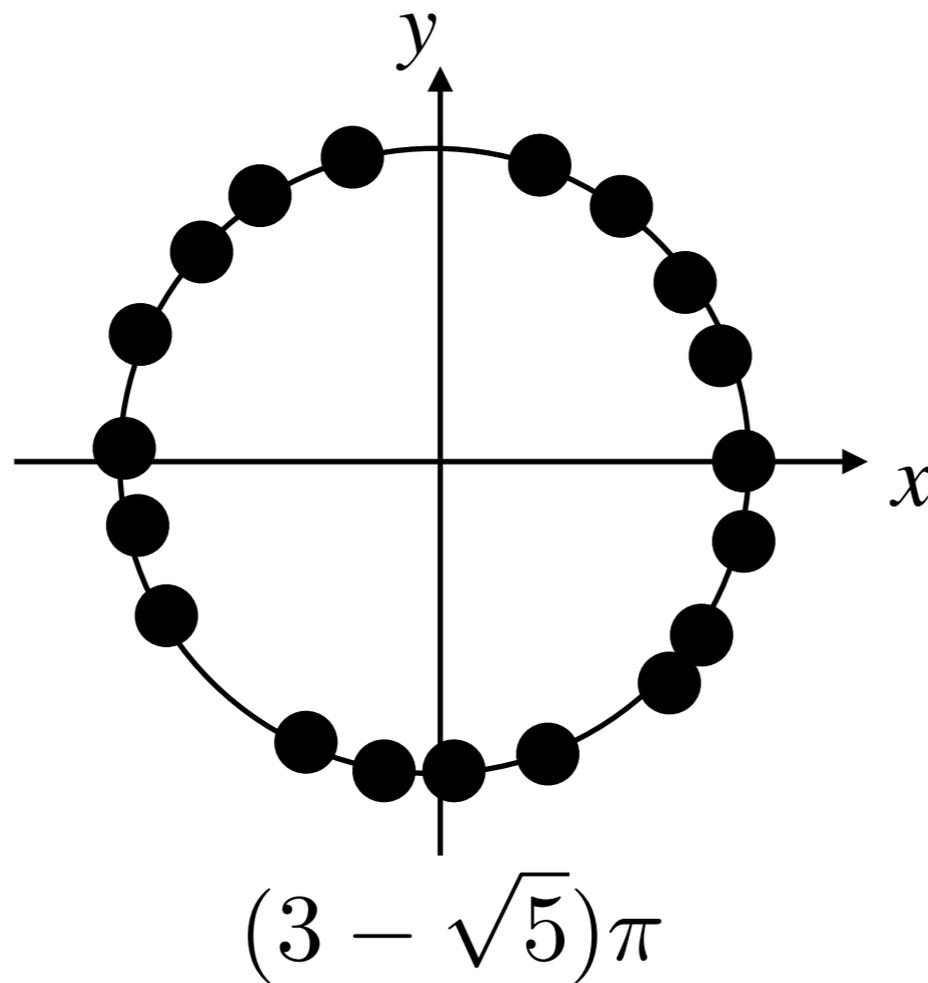
non-Clifford演算



non-Clifford演算



non-Clifford演算



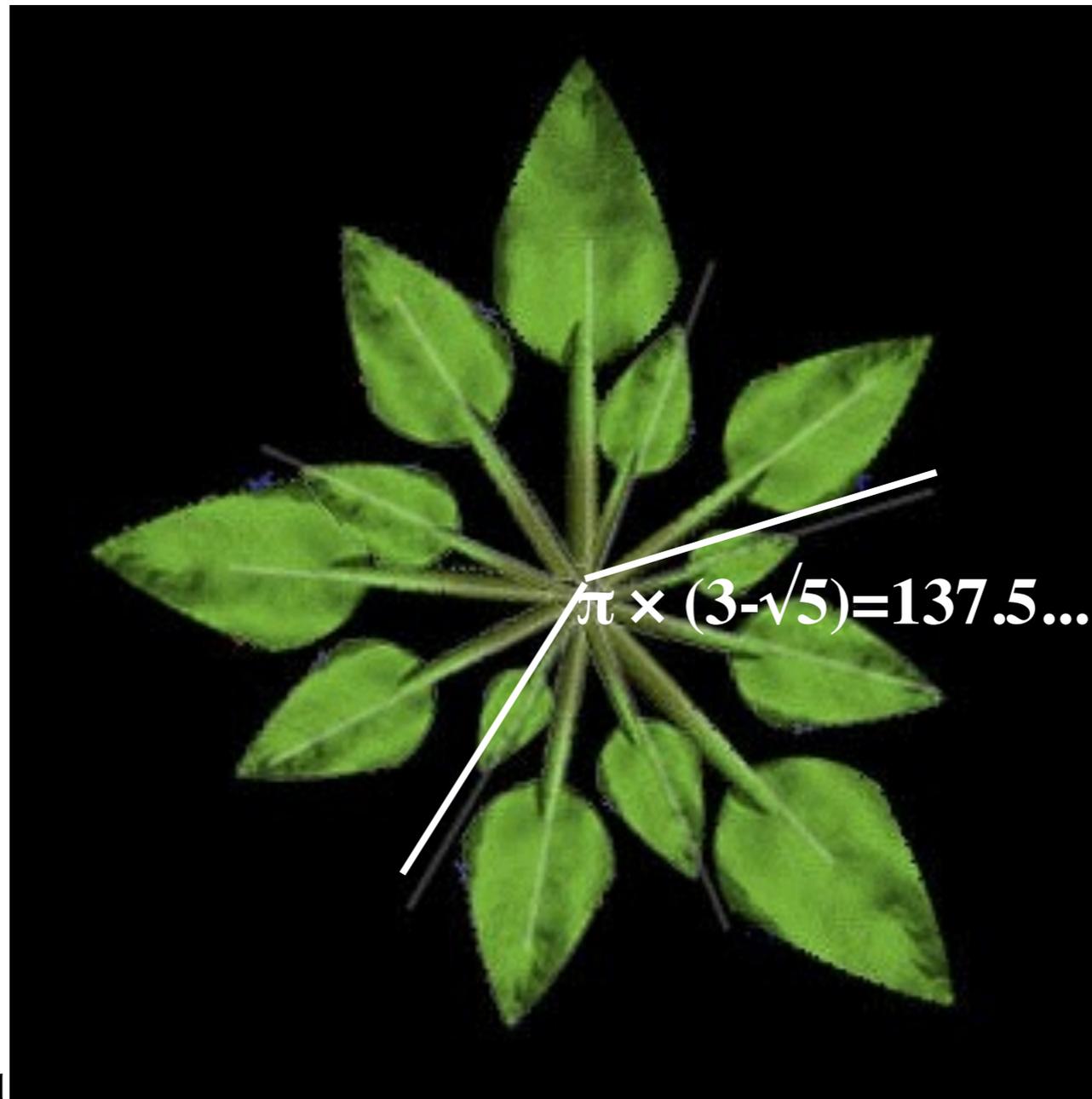
無理数倍 → 任意の角度 θ の近似を効率よく得られる.

non-Clifford演算



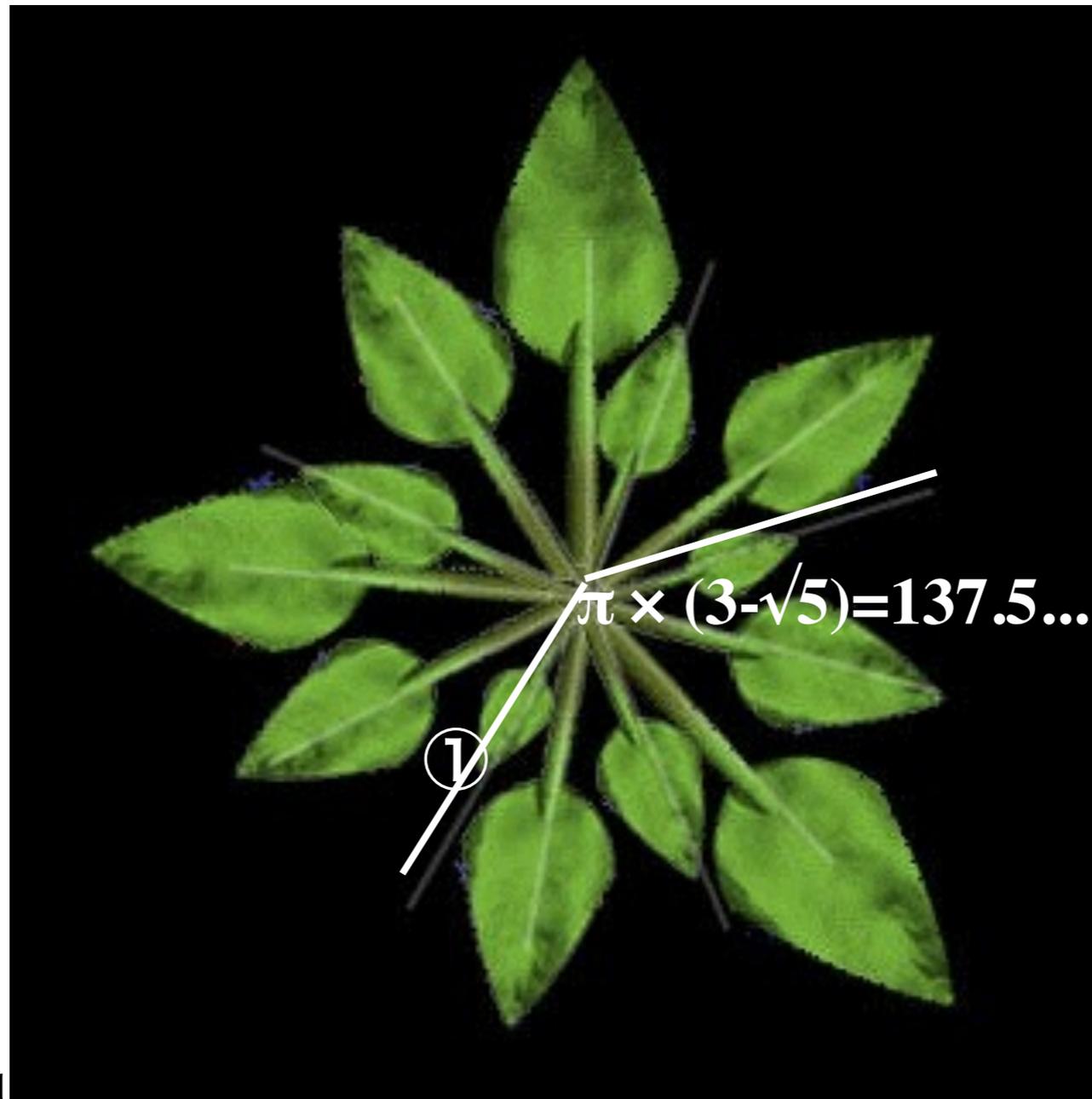
無理数倍の回転で繰り返される。

non-Clifford演算



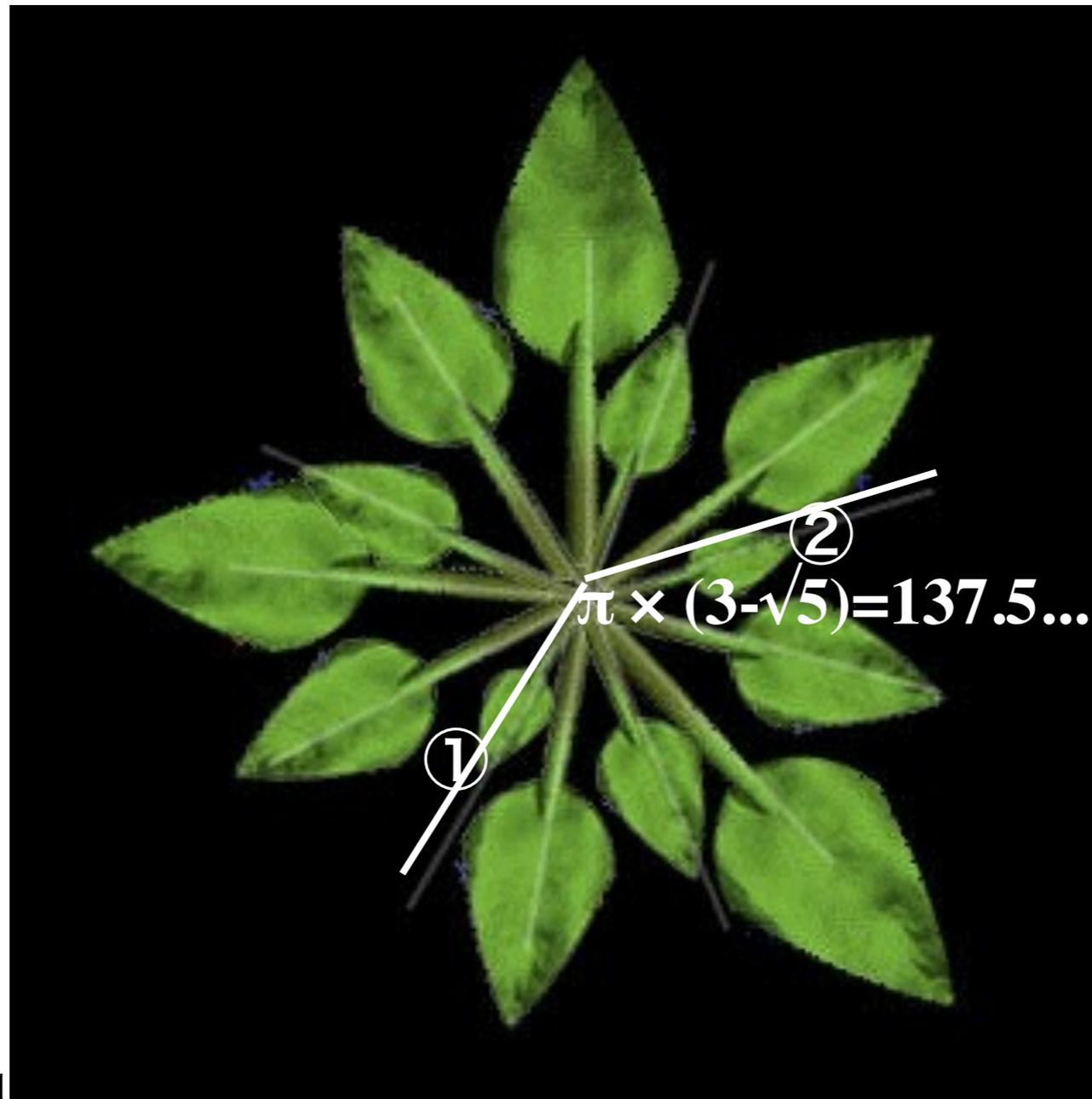
無理数倍の回転で葉の向きがほぼ等しくなる。

non-Clifford演算



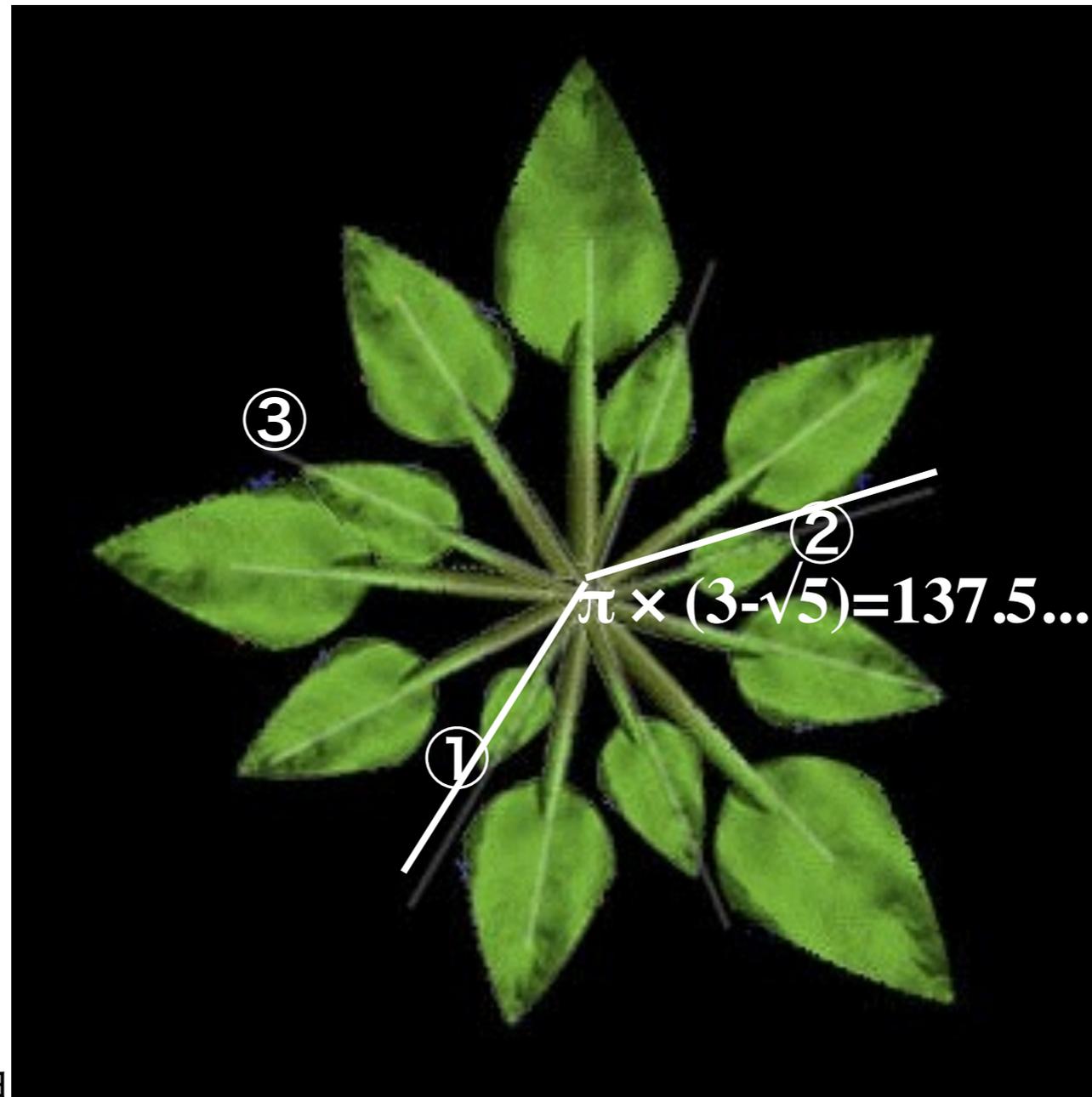
無理数倍の回転で、その近似的に繰り返される。

non-Clifford演算



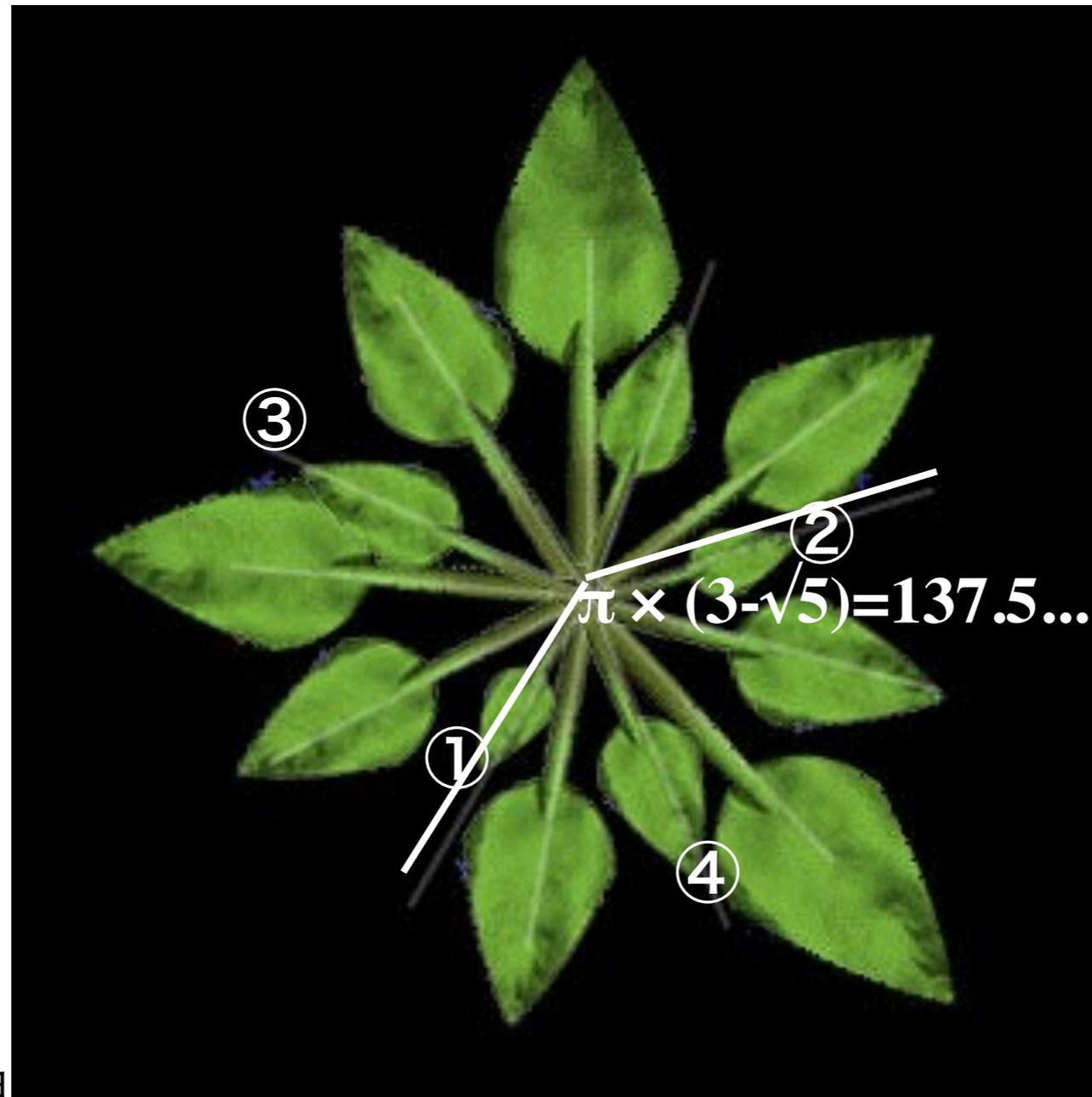
無理数倍の回転の方向及びその近似的な角度と対応が与えられる。

non-Clifford演算



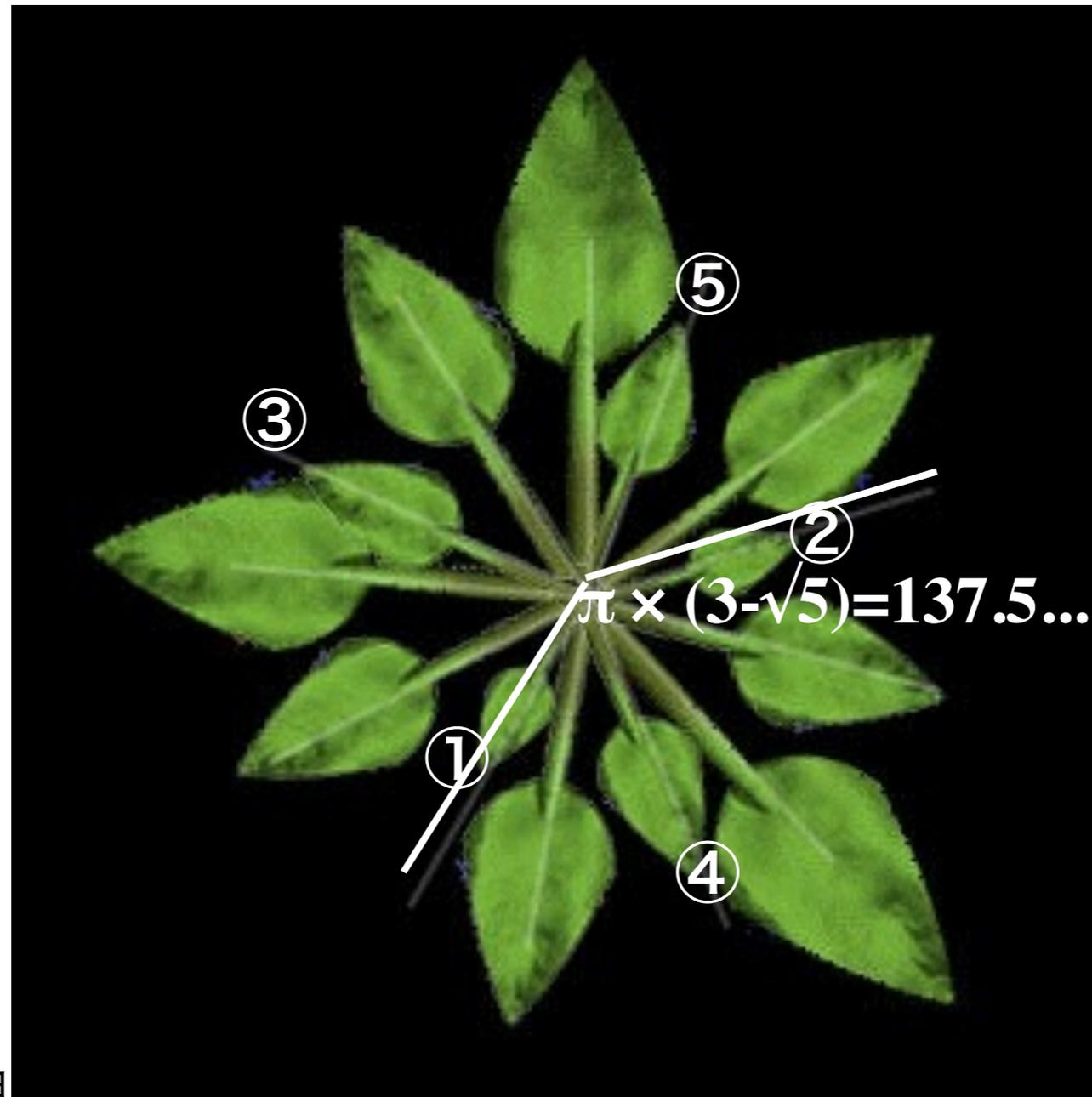
無理数倍の回転で、その近似的に計算される。

non-Clifford演算



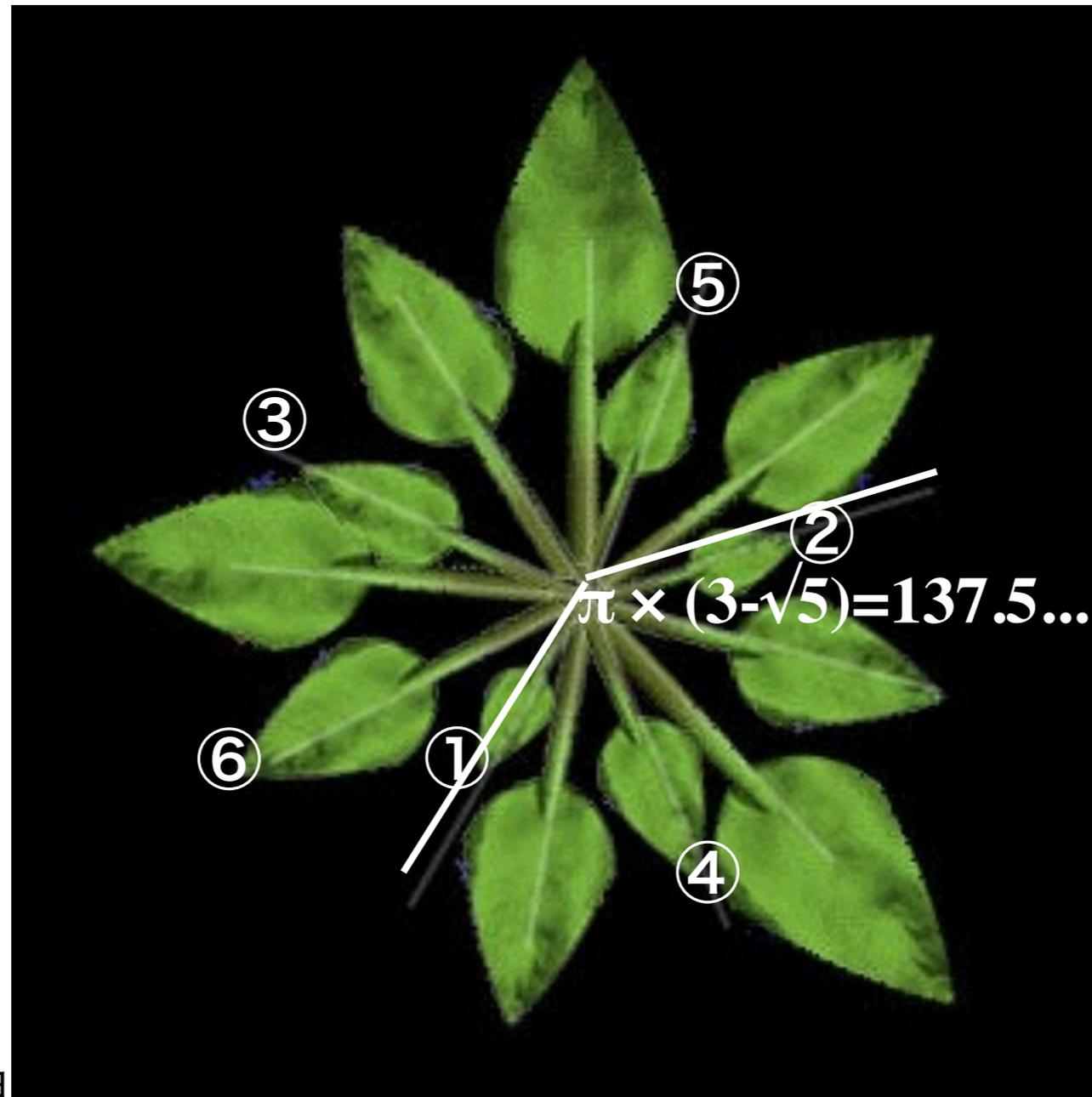
無理数倍の回転で、互いの影が干渉しあう。この角度で、互いの影が干渉しあう。

non-Clifford演算



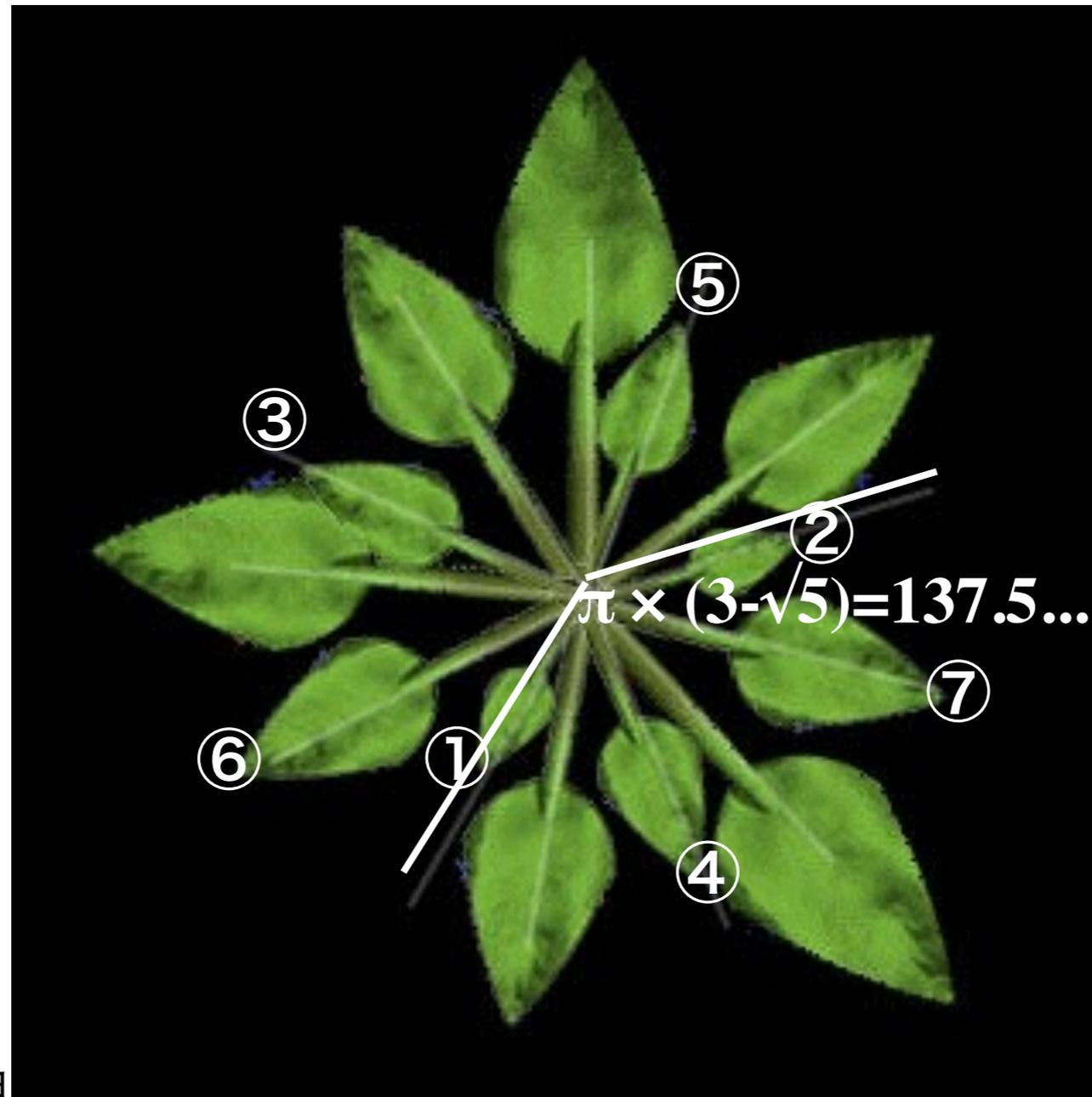
無理数倍の回転で、黄金比の逆数と関係が与えられる。

non-Clifford演算



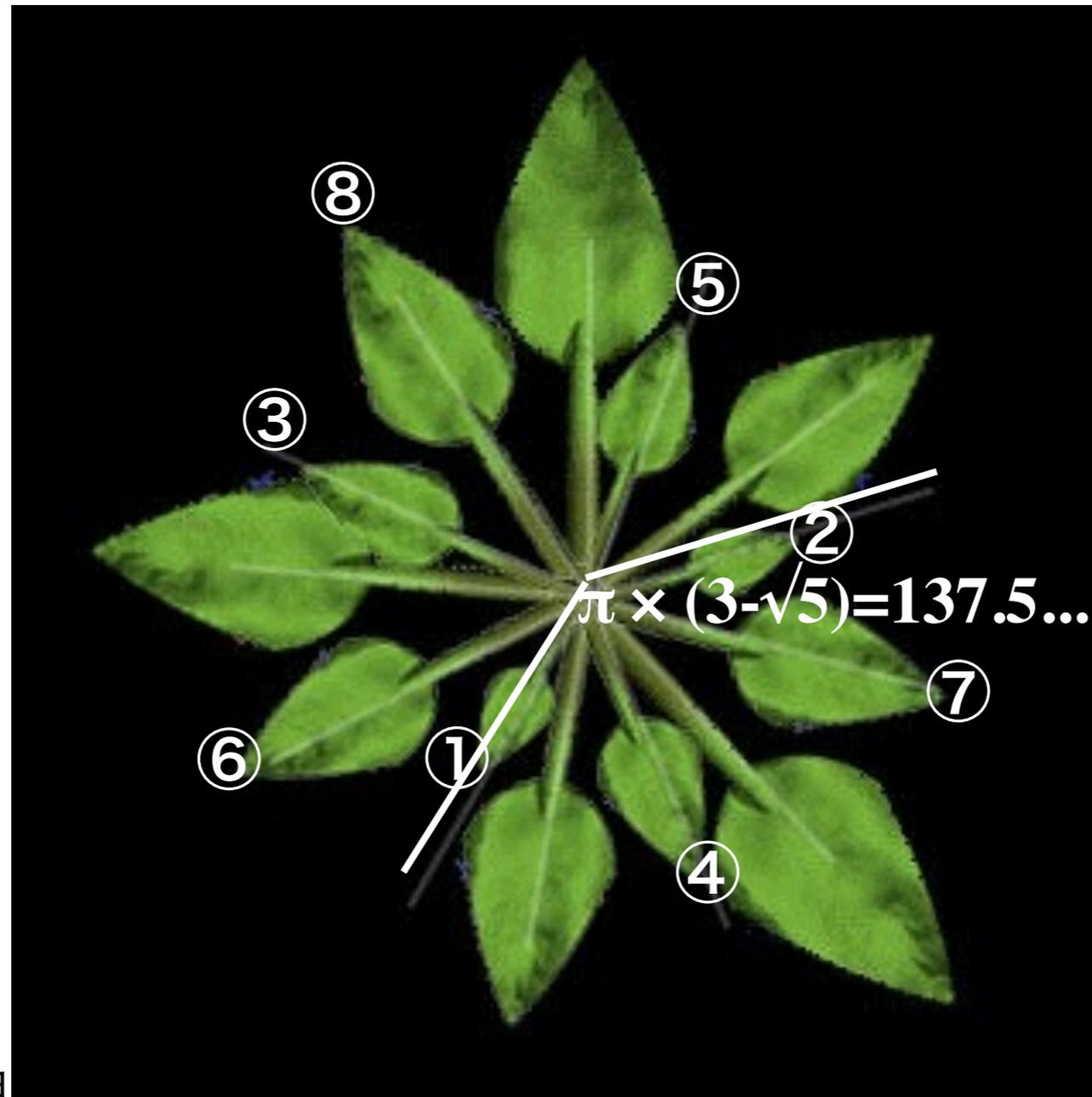
無理数倍の回転で、その近似的に知られる。

non-Clifford演算



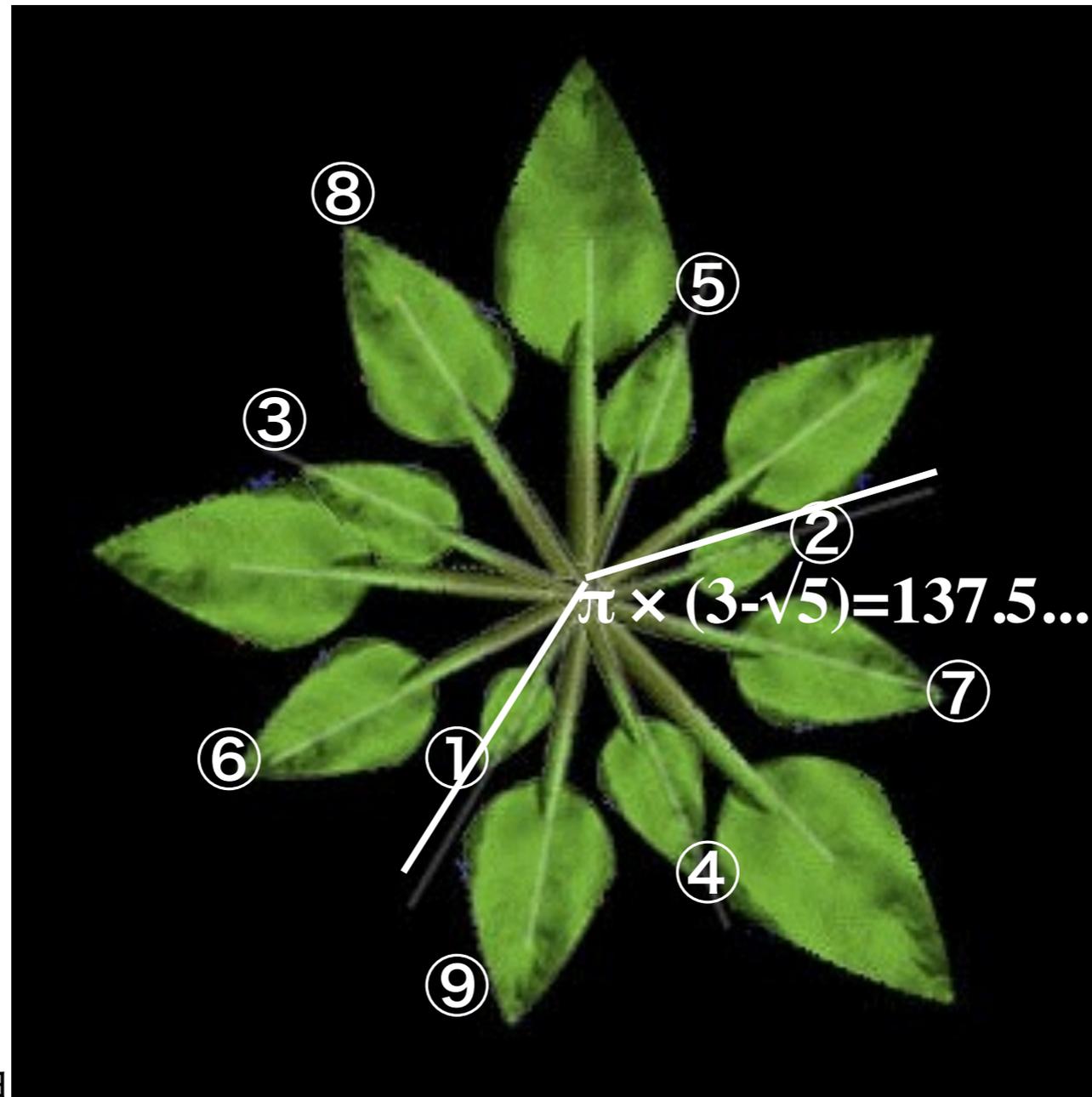
無理数倍の回転で葉の向きがほぼ等しくなる。

non-Clifford演算



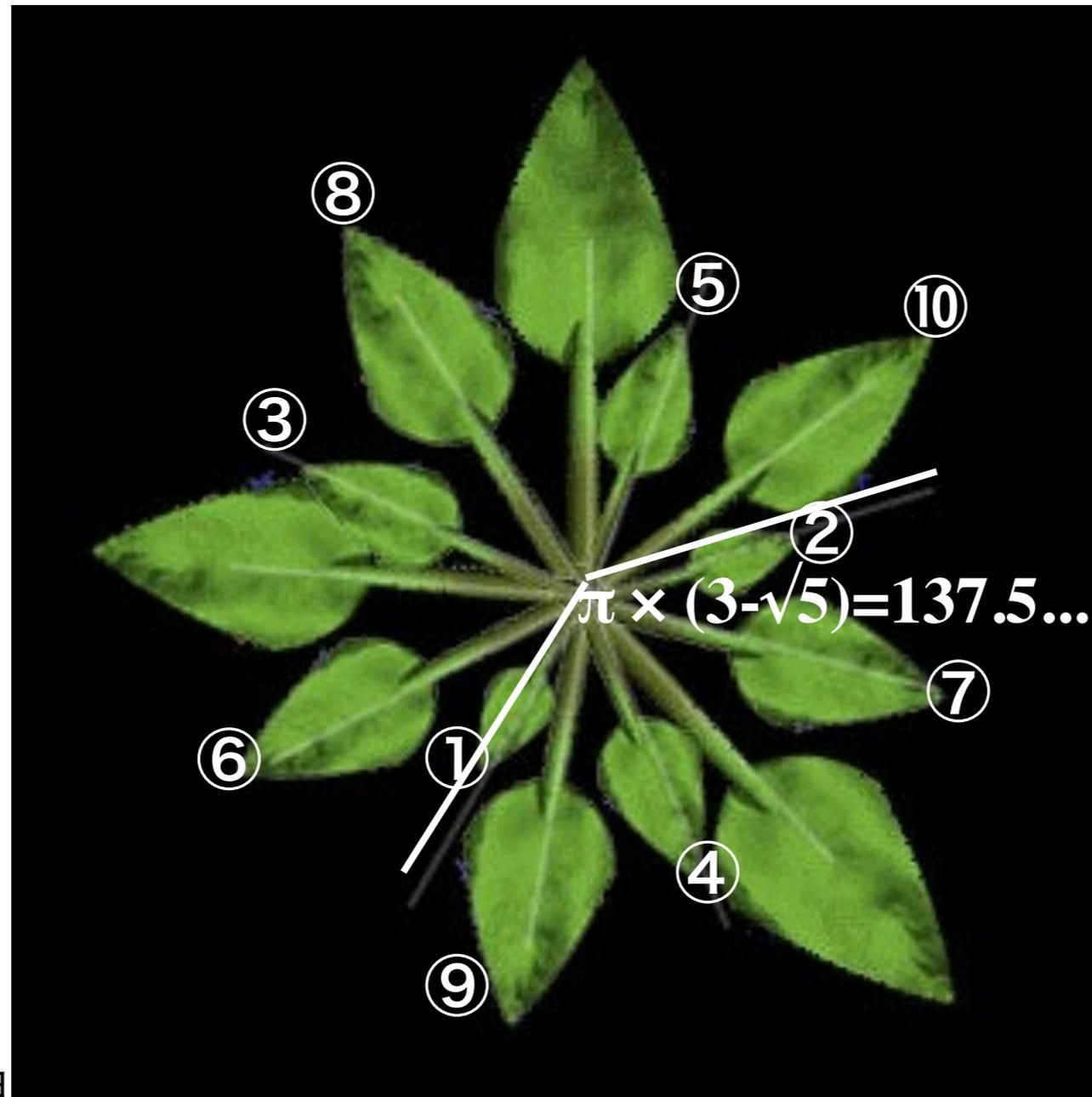
無理数倍の回転で、その近似的に知られる。

non-Clifford演算



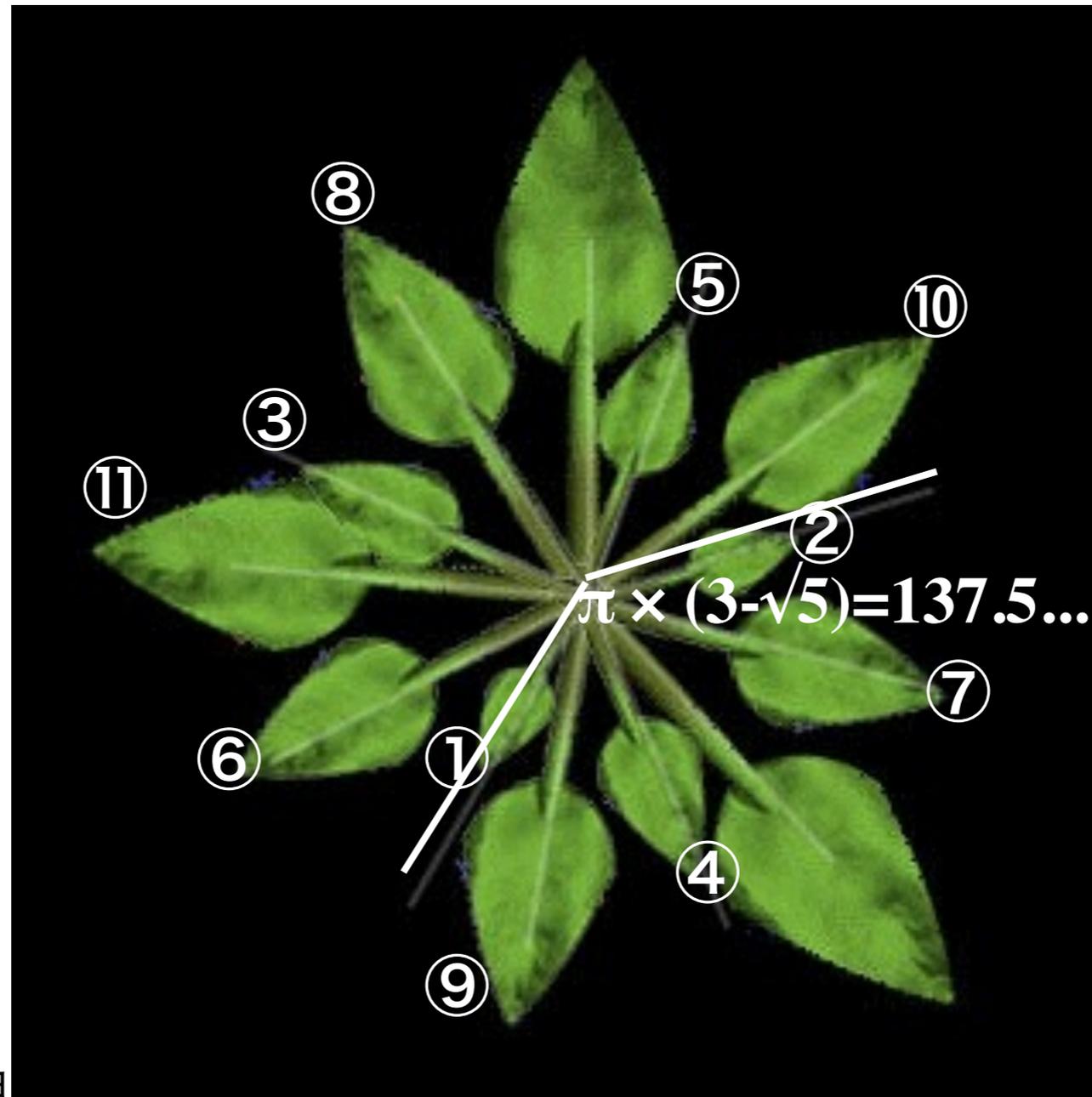
無理数倍の回転で葉の向きが反時計回りに回られる。

non-Clifford演算



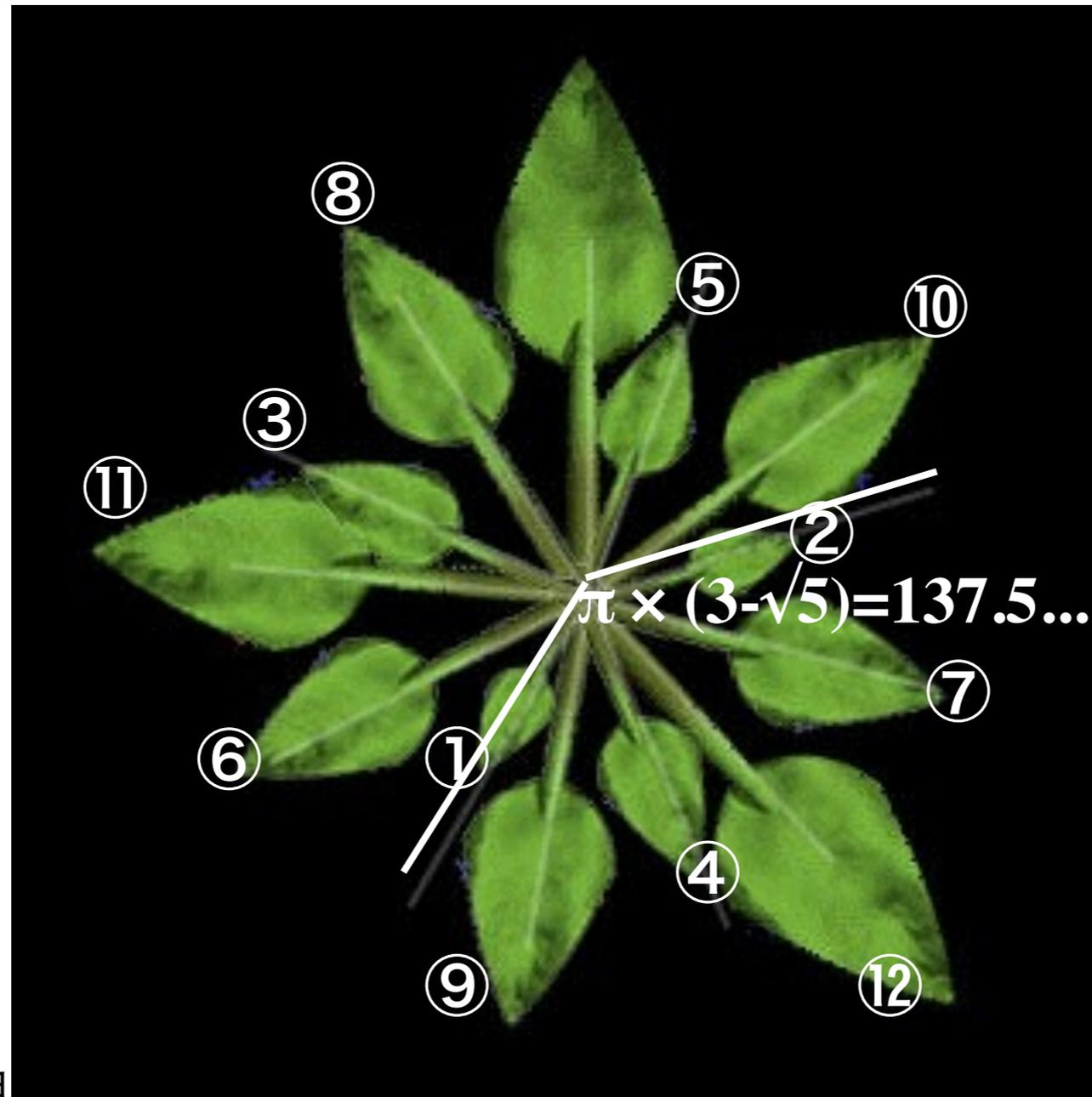
無理数倍の回転で葉の向きがほぼ等しくなる。

non-Clifford演算



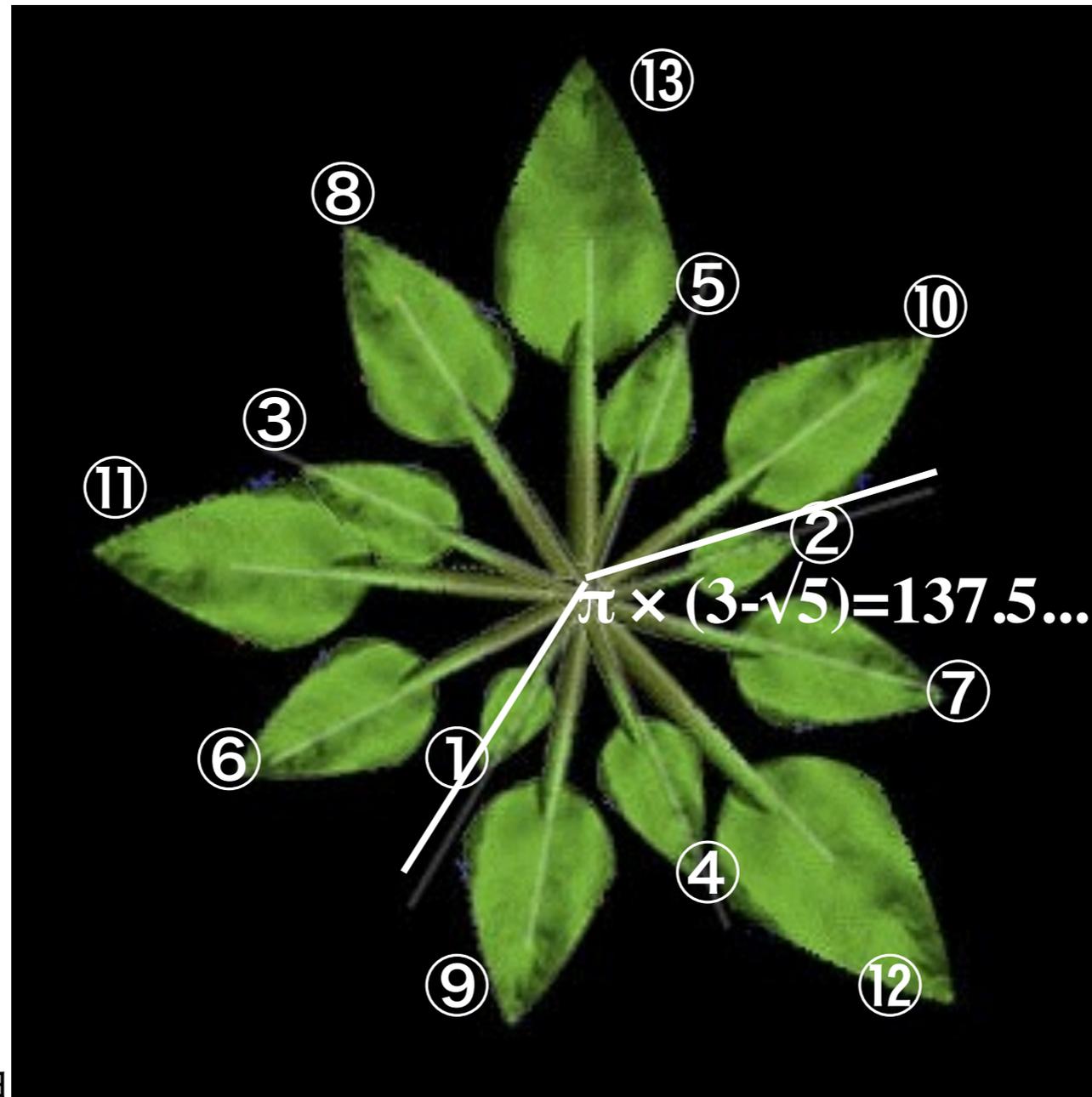
無理数倍の回転で葉の向きが反時計回りに回られる。

non-Clifford演算



無理数倍の回転で葉の向きがほぼ等しくなる。

non-Clifford演算



無理数倍の回転で葉の向きがほぼ等しくなる。

non-Clifford演算

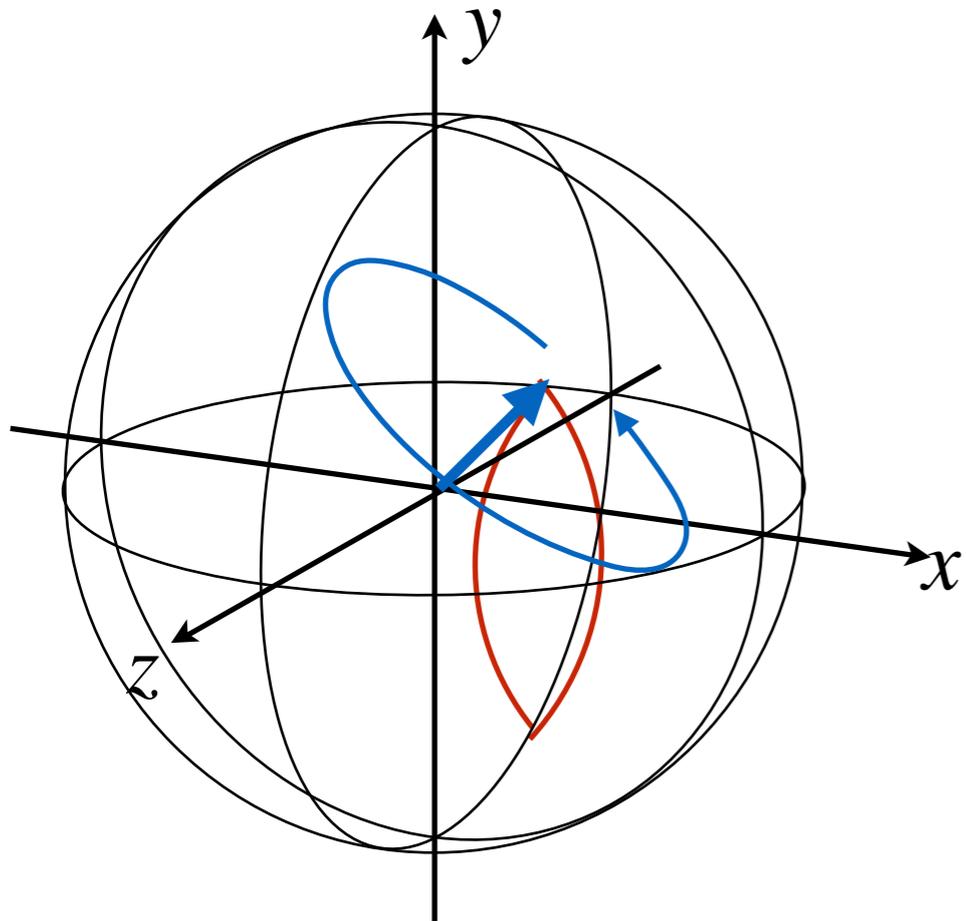
$$\pi/8 \text{ 演算} : T = e^{-i(\pi/8)Z}$$

non-Clifford演算

$$\pi/8 \text{ 演算} : T = e^{-i(\pi/8)Z}$$

$$THTH = \cos^2 \frac{\pi}{8} I - i \left[\cos \frac{\pi}{8} (X + Z) + \sin \frac{\pi}{8} Y \right] \sin \frac{\pi}{8}$$

$$\left(\cos \frac{\pi}{8}, \sin \frac{\pi}{8}, \cos \frac{\pi}{8} \right)$$



non-Clifford演算

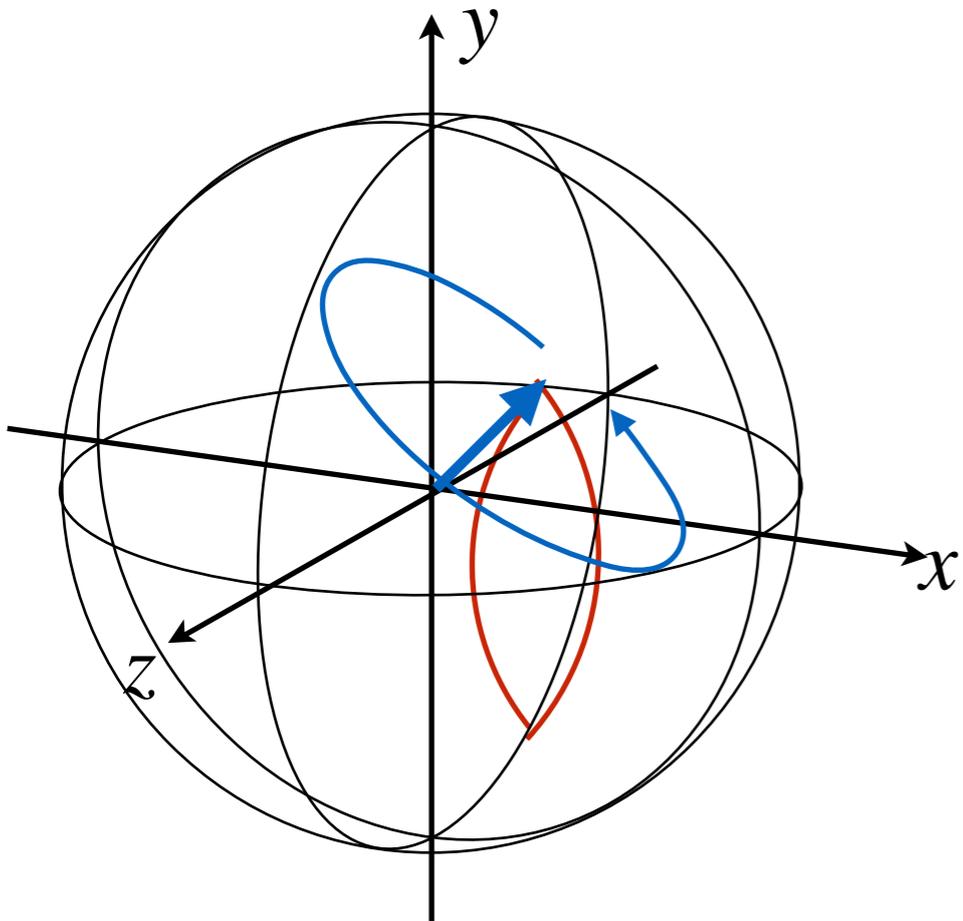
$$\pi/8 \text{ 演算} : T = e^{-i(\pi/8)Z}$$

$$THTH = \cos^2 \frac{\pi}{8} I - i \left[\cos \frac{\pi}{8} (X + Z) + \sin \frac{\pi}{8} Y \right] \sin \frac{\pi}{8}$$

$$\left(\cos \frac{\pi}{8}, \sin \frac{\pi}{8}, \cos \frac{\pi}{8} \right)$$

$$\text{回転角} \rightarrow \theta = 2 \arccos[\cos^2(\pi/8)]$$

$\{H, T\}$ の積で任意の1量子ビット演算を
効率よく近似できる。



Solovay-Kitaevアルゴリズム

Solovay-Kitaev(U, n)

if $n=0$, return basic approximation of U

else $U_{n-1} = \text{Solovay-Kitaev}(U, n-1)$

V, W s.t. $VWV^\dagger W^\dagger = U U_{n-1}^\dagger$

$V_{n-1} = \text{Solovay-Kitaev}(V, n-1)$

$W_{n-1} = \text{Solovay-Kitaev}(W, n-1)$

Return $V_{n-1} W_{n-1} V_{n-1}^\dagger W_{n-1}^\dagger U_{n-1}$

→ $O(\log^c(1/\epsilon))$

多量子ビット系

◆ 合成系（直積状態）： $|\psi_a\rangle \otimes |\psi_b\rangle$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} |00\rangle \\ |01\rangle \\ |10\rangle \\ |11\rangle \end{matrix} \quad \text{Kronecker積}$$

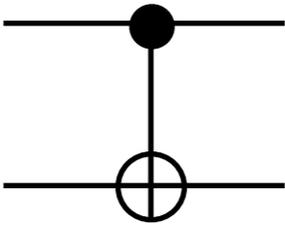
多量子ビット系

◆ 合成系（直積状態）： $|\psi_a\rangle \otimes |\psi_b\rangle$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} |00\rangle \\ |01\rangle \\ |10\rangle \\ |11\rangle \end{matrix} \quad \text{Kronecker積}$$

◆ 2量子ビット演算：

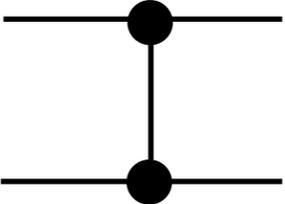
$\Lambda(X)$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} |00\rangle \\ |01\rangle \\ |10\rangle \\ |11\rangle \end{matrix} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$$

CNOT (controlled NOT)

$\Lambda(Z)$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |00\rangle \\ |01\rangle \\ |10\rangle \\ |11\rangle \end{matrix} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes Z$$

CZ (controlled Z)

$$e^{-i\pi/4(Z_1 Z_2 - Z_1 - Z_2 - I)}$$

万能量子計算

- ◆ Solovay-Kitaev アルゴリズム : $\{H, T\} \rightarrow$ 任意の1量子ビット演算

万能量子計算

- ◆ Solovay-Kitaev アルゴリズム : $\{H, T\} \rightarrow$ 任意の1量子ビット演算
- ◆ CNOT + 任意の1量子ビット演算 \rightarrow 任意の n 量子ビット演算

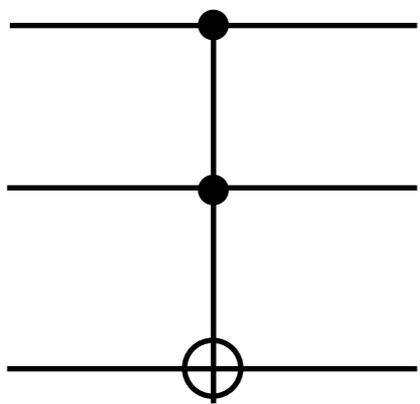
universal set $\{\Lambda(X), H, T\}$

万能量子計算

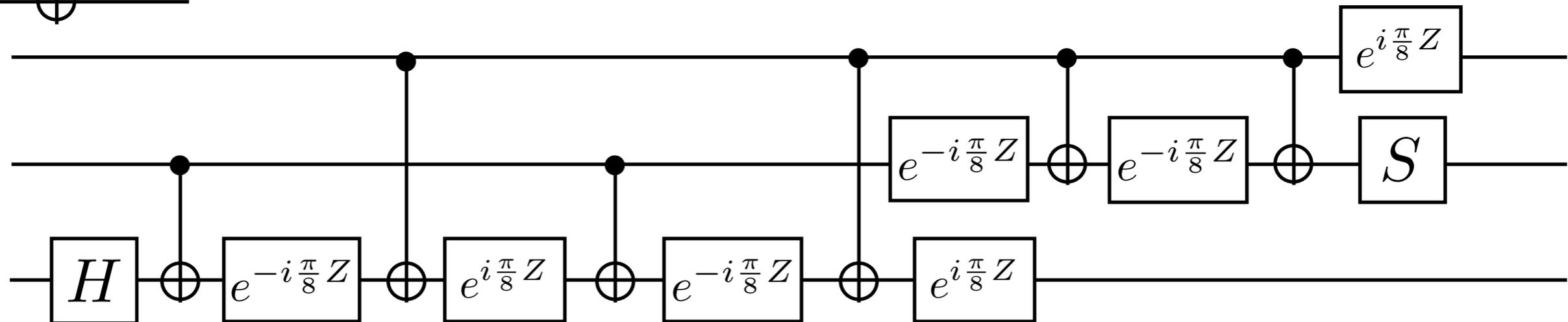
- ◆ Solovay-Kitaev アルゴリズム : $\{H, T\} \rightarrow$ 任意の1量子ビット演算
- ◆ CNOT + 任意の1量子ビット演算 \rightarrow 任意の n 量子ビット演算

universal set $\{\Lambda(X), H, T\}$

Toffoli gate



=

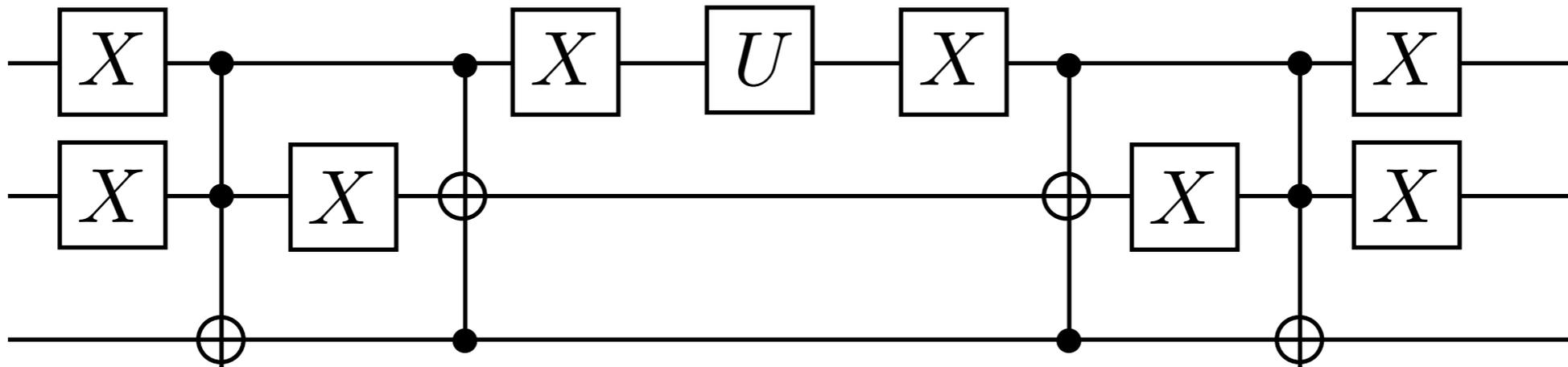


万能量子計算

- ◆ Solovay-Kitaev アルゴリズム : $\{H, T\} \rightarrow$ 任意の1量子ビット演算
- ◆ CNOT + 任意の1量子ビット演算 \rightarrow 任意の n 量子ビット演算

universal set $\{\Lambda(X), H, T\}$

部分空間 $\{|000\rangle, |111\rangle\}$ 内の回転 :



同様に任意の2準位間のユニタリ演算を実現できる.

目次

✓ 量子計算

Pauli演算子, ブロッホ球, Clifford演算子, non-Clifford演算,
Solovay-Kitaevアルゴリズム, 直積空間, CNOT演算, 万能量子計算

✓ スタビライザー形式

スタビライザー群, Clifford演算, Gottesman-Knillの定理,マジック状態

✓ 測定型量子計算

スタビライザー形式



スタビライザー形式

◆ n -量子ビット系:

$$|\psi_n\rangle = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_n} c_{s_1 s_2 \dots s_n} \underbrace{|s_1 s_2 \dots s_n\rangle}_{\downarrow |s_1\rangle \otimes |s_2\rangle \otimes \dots \otimes |s_n\rangle}$$

→パラメータの数は指数的に増えてしまう。
効率よく記述する方法?

スタビライザー形式

◆ n -量子ビット系:

$$|\psi_n\rangle = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_n} c_{s_1 s_2 \dots s_n} \underbrace{|s_1 s_2 \dots s_n\rangle}_{\downarrow |s_1\rangle \otimes |s_2\rangle \otimes \dots \otimes |s_n\rangle}$$

→パラメータの数は指数的に増えてしまう.

効率よく記述する方法?

→ **Stabilizer 形式**

D. Gottesman, Ph.D. thesis, California Institute of Technology (1997);
arXiv:quant-ph/9705052.

Pauli group, Stabilizer group

◆ n -qubit Pauli group:

$$\{\pm 1, \pm i\} \times \{I, X, Y, Z\}^{\otimes n} \in \mathcal{P}_n$$

Pauli group, Stabilizer group

- ◆ n -qubit Pauli group:

$$\{\pm 1, \pm i\} \times \{I, X, Y, Z\}^{\otimes n} \in \mathcal{P}_n$$

- ◆ Stabilizer group $\mathcal{S} = \{S_i\}$: Pauli群(エルミート)の可換部分群

$$S_i \in \mathcal{P}, \quad S_i = S_i^\dagger, \quad [S_i, S_j] = 0$$

例) $\langle XX, ZZ \rangle = \{II, XX, ZZ, -YY\}$

stabilizer generator



even overlap 反可換×2=可換!

Stabilizer states

[Gottesman PhD thesis arXiv:quant-ph/9705052]

◆ Stabilizer state : すべてのstabilizer演算子 $S_i \in \mathcal{S}$ に対して

$$S_i |\Psi\rangle = |\Psi\rangle$$

を満たす状態 $|\Psi\rangle$.

- stabilizer group は可換群なので, 同時対角化できる.
- stabilizer generator の固有状態であれば十分.

Stabilizer states

[Gottesman PhD thesis arXiv:quant-ph/9705052]

◆ Stabilizer state : すべての stabilizer 演算子 $S_i \in \mathcal{S}$ に対して

$$S_i |\Psi\rangle = |\Psi\rangle$$

を満たす状態 $|\Psi\rangle$.

- stabilizer group は可換群なので, 同時対角化できる.
- stabilizer generator の固有状態であれば十分.

例1) $\mathcal{S}_1 = \langle XX, ZZ \rangle$

Bell state $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$

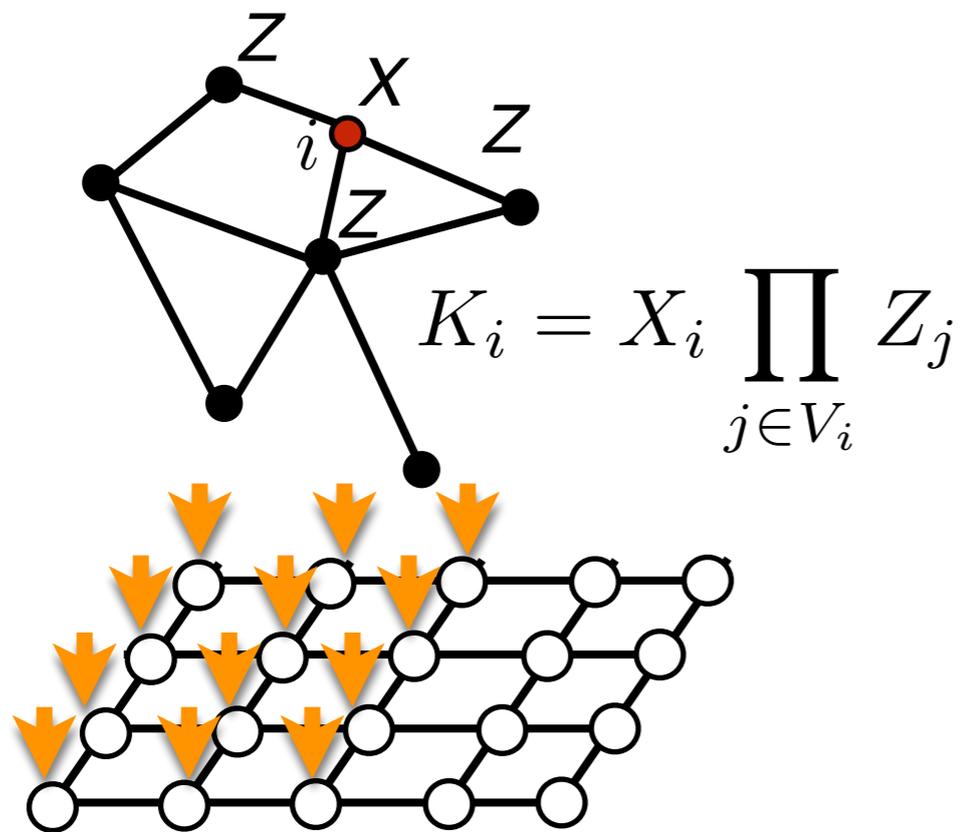
例2) $\mathcal{S}_2 = \langle ZZ \rangle$

$\{|00\rangle, |11\rangle\}$ で張られる部分空間内の任意の状態.

→ generator の数が qubit 数より少ないとき.

Stabilizer state の例

◆ Graph state

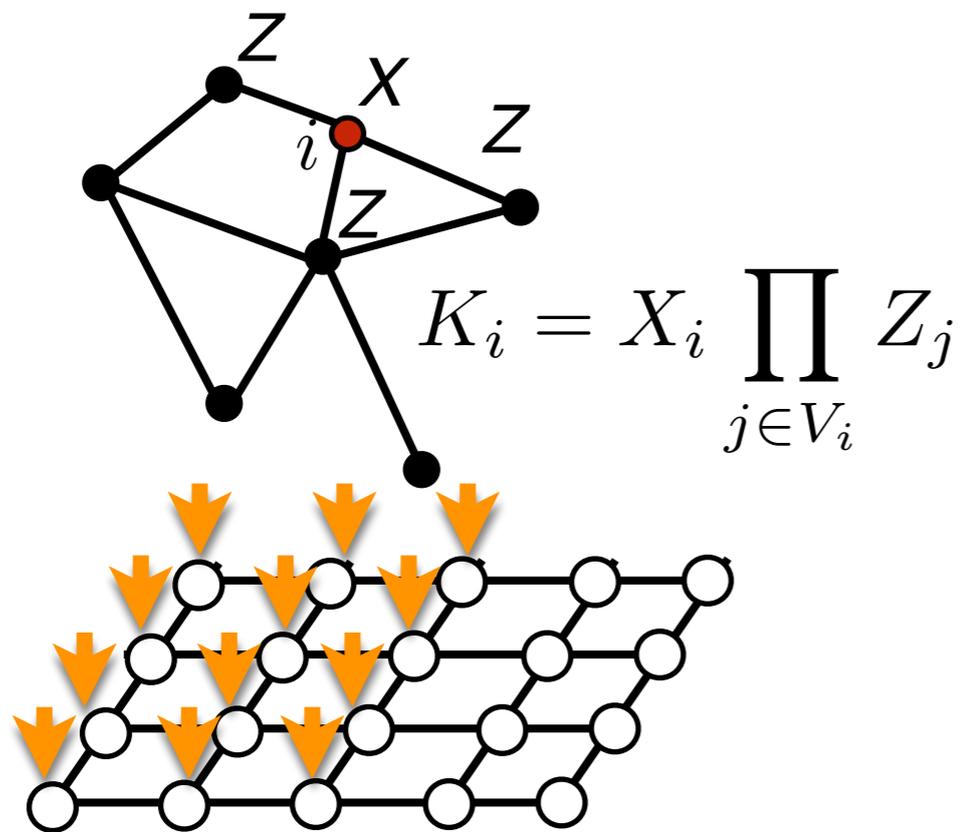


measurement-based quantum
computation (MBQC) のリソース状態

[Raussendorf-Briegel PRL '01]

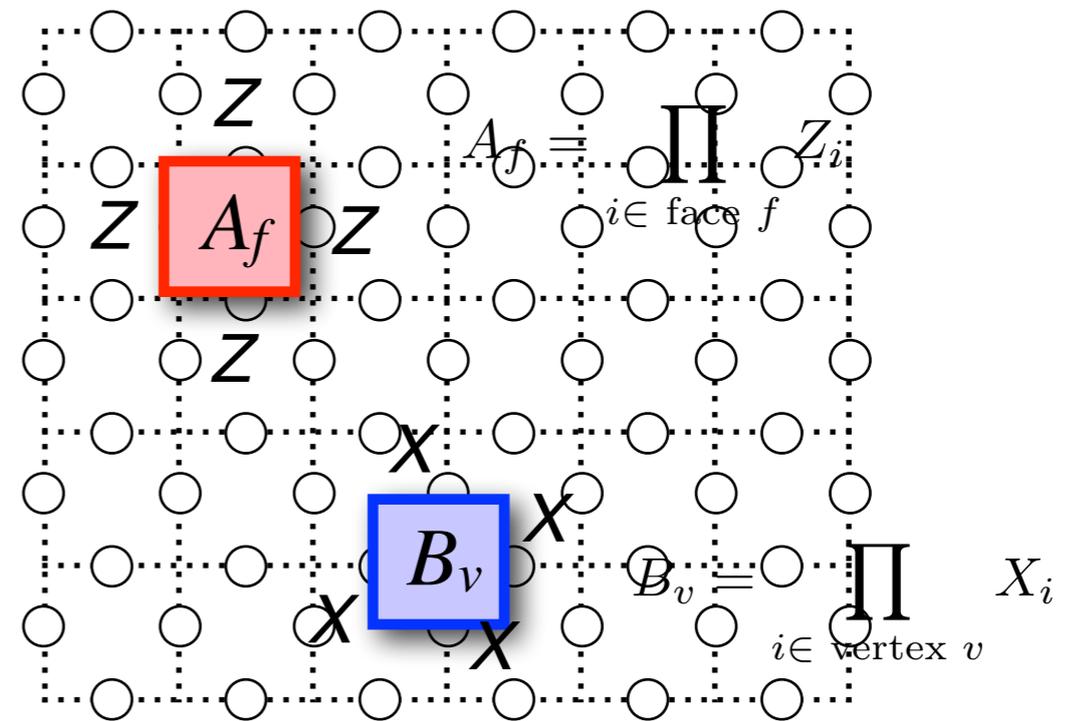
Stabilizer state の例

◆ Graph state



measurement-based quantum computation (MBQC) のリソース状態
[Raussendorf-Briegel PRL '01]

◆ Surface code (Toric code) state

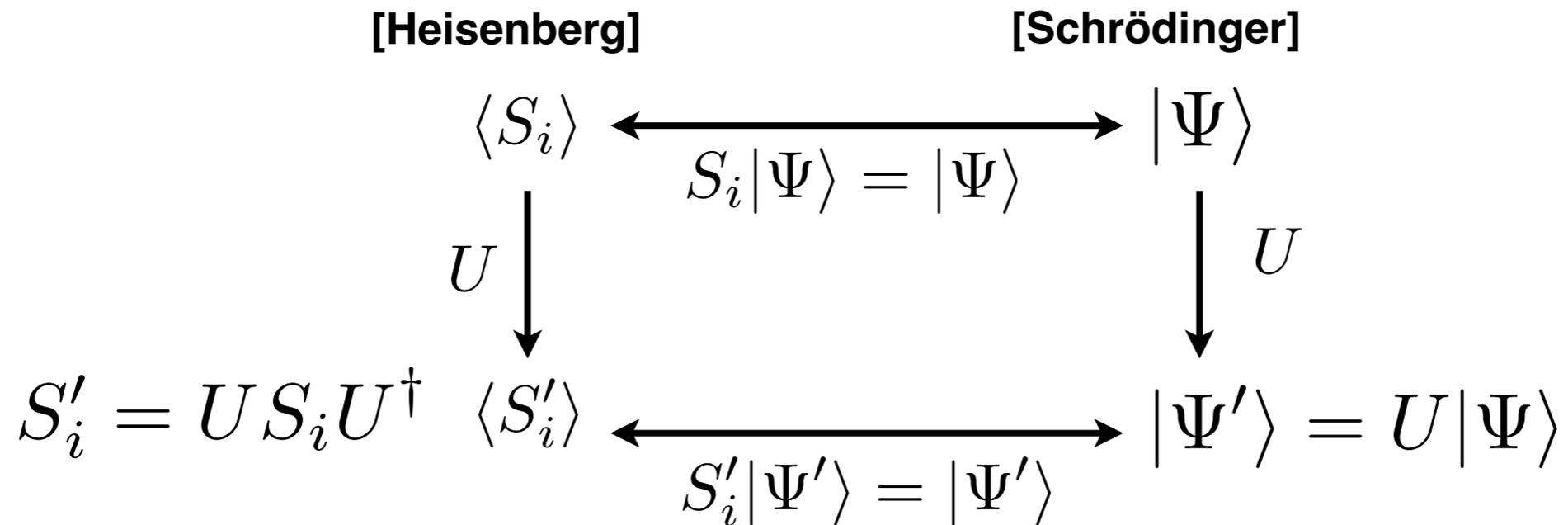


Quantum error correction code/
ground state of topologically ordered system
[Kitaev Ann Phys '03]

Stabilizer形式(Clifford演算)

Clifford演算 : Pauli product を Pauli product に

→ stabilizer state を stabilizer state に



Stabilizer形式(Clifford演算)

Clifford演算 : Pauli product を Pauli product に

→ stabilizer state を stabilizer state に

$$\begin{array}{ccc} \text{[Heisenberg]} & & \text{[Schrödinger]} \\ \langle S_i \rangle & \xleftrightarrow{S_i |\Psi\rangle = |\Psi\rangle} & |\Psi\rangle \\ U \downarrow & & \downarrow U \\ S'_i = U S_i U^\dagger & & \\ \langle S'_i \rangle & \xleftrightarrow{S'_i |\Psi'\rangle = |\Psi'\rangle} & |\Psi'\rangle = U |\Psi\rangle \end{array}$$

Clifford演算子 U の作用は, stabilizer演算子への作用

$$S_i \rightarrow S'_i = U S_i U^\dagger$$

によって記述される.

Clifford演算

$$\begin{array}{c} \text{---} \boxed{H} \text{---} \\ \text{Hadamard} \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$HXH = Z$$

Clifford演算

$$\text{---} \boxed{H} \text{---} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hadamard

$$HXH = Z$$

$$\text{---} \boxed{S} \text{---} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Phase

$$SXS^\dagger = Y$$

Clifford演算

$$\begin{array}{c} \text{---} \boxed{H} \text{---} \\ \text{Hadamard} \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$HXH = Z$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \boxed{S} \text{---} \\ \text{Phase} \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$SXS^\dagger = Y$$

$$\Lambda(X) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & X \\ \text{---} & \bullet & \text{---} \\ & | & \\ \text{---} & \oplus & \text{---} \\ Z & \xrightarrow{\quad} & Z \end{array} \\ \text{CNOT (controlled NOT)} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} |00\rangle \\ |01\rangle \\ |10\rangle \\ |11\rangle \end{array} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$$

$$\begin{array}{l} \Lambda(X)(X \otimes I)\Lambda(X) = X \otimes X \\ \Lambda(X)(I \otimes Z)\Lambda(X) = Z \otimes Z \end{array}$$

Clifford演算

$$\begin{array}{c} \text{---} \boxed{H} \text{---} \\ \text{Hadamard} \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$HXH = Z$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \boxed{S} \text{---} \\ \text{Phase} \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$SXS^\dagger = Y$$

$$\Lambda(X) \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} |00\rangle \\ |01\rangle \\ |10\rangle \\ |11\rangle \end{array} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$$

CNOT (controlled NOT)

$$\Lambda(X)(X \otimes I)\Lambda(X) = X \otimes X$$

$$\Lambda(X)(I \otimes Z)\Lambda(X) = Z \otimes Z$$

$$\Lambda(Z) \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} |00\rangle \\ |01\rangle \\ |10\rangle \\ |11\rangle \end{array} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes Z$$

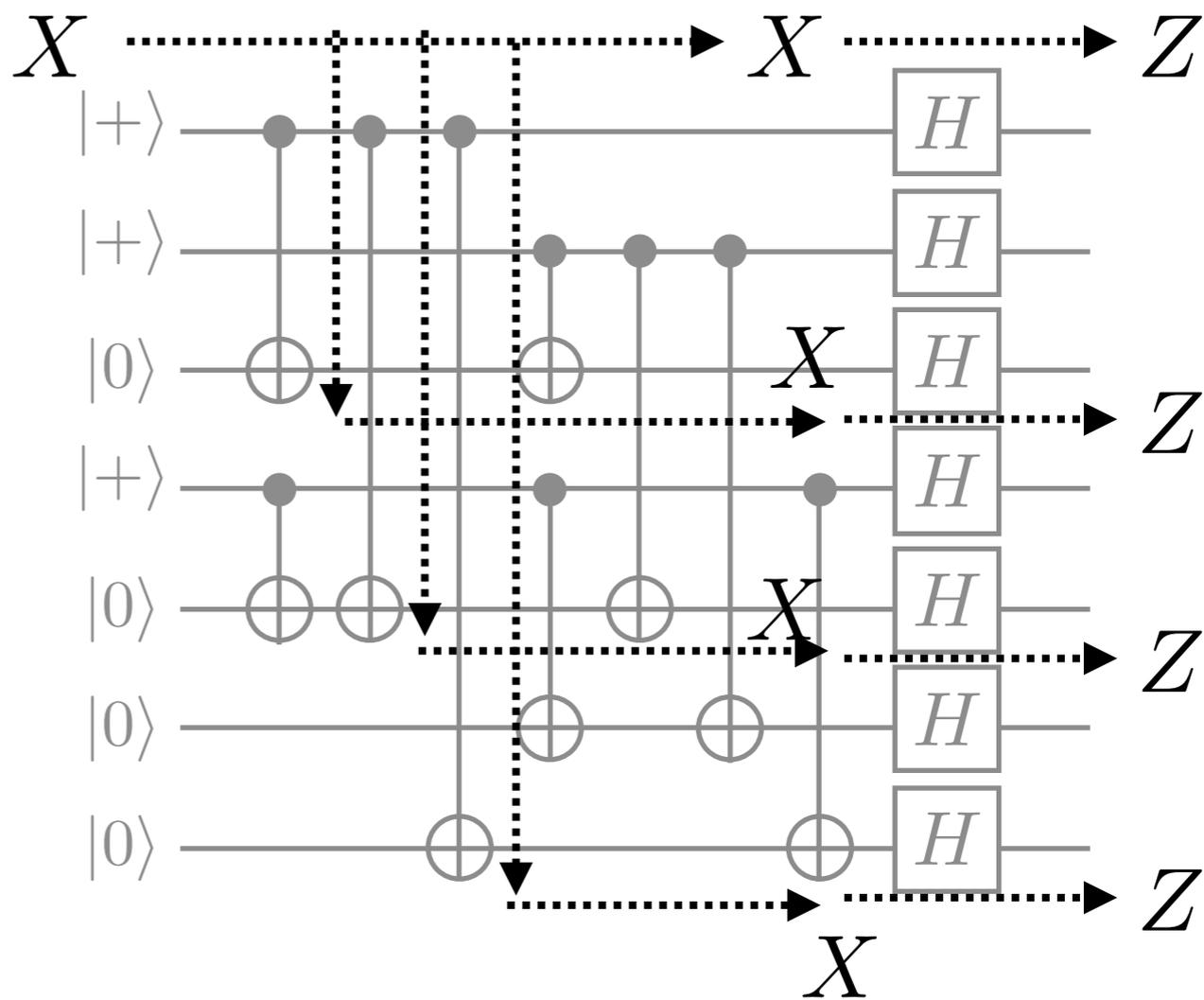
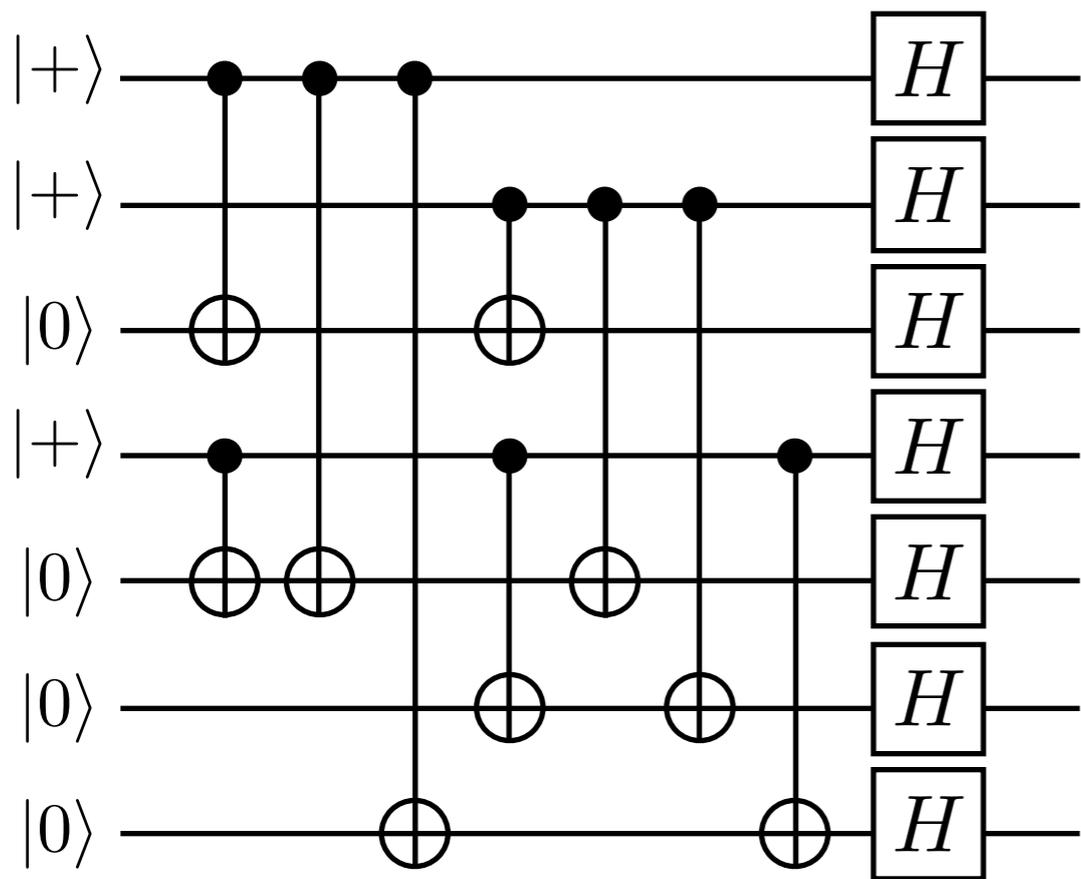
CZ (controlled Z)

$$e^{-i\pi/4(Z_1 Z_2 - Z_1 - Z_2 - I)}$$

$$\Lambda(Z)(X \otimes I)\Lambda(Z) = X \otimes Z$$

$$\Lambda(Z)(I \otimes X)\Lambda(Z) = Z \otimes X$$

Clifford演算



Gottesman-Knillの定理

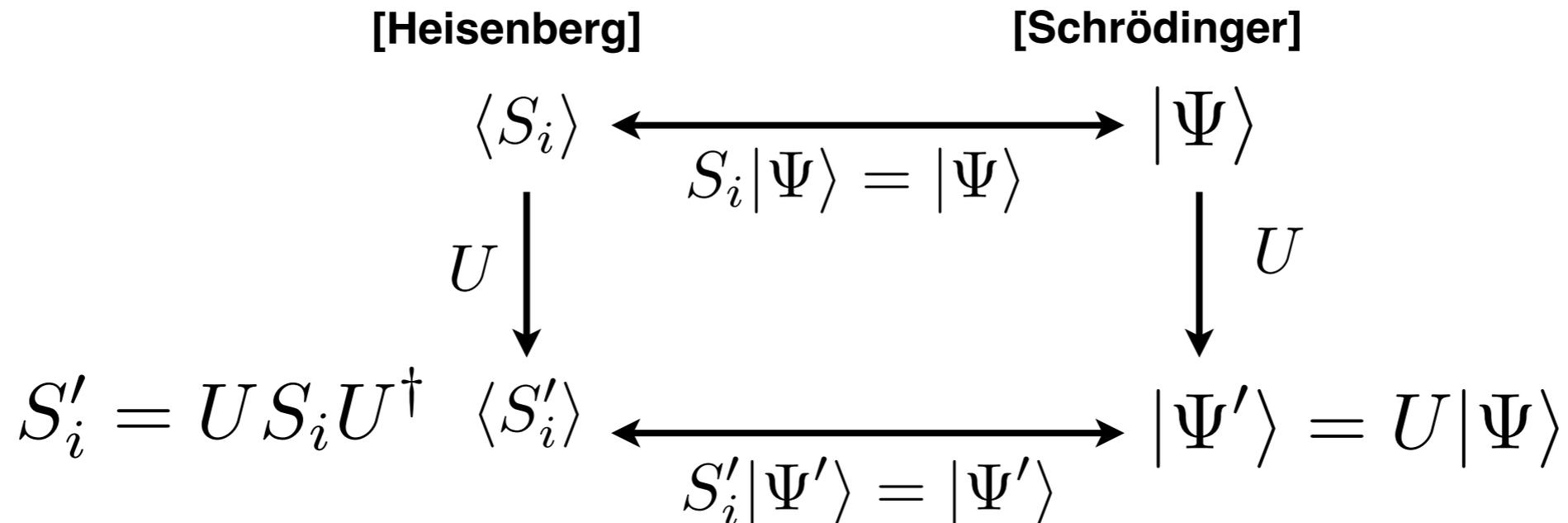
(Clifford演算だと classically simulatable)

Input : Pauli演算子の固有状態.

Operation : Clifford演算

Measurement : Pauli基底

n qubit stabilizer state \rightarrow n 個の演算子



Gottesman-Knillの定理

(Clifford演算だと classically simulatable)

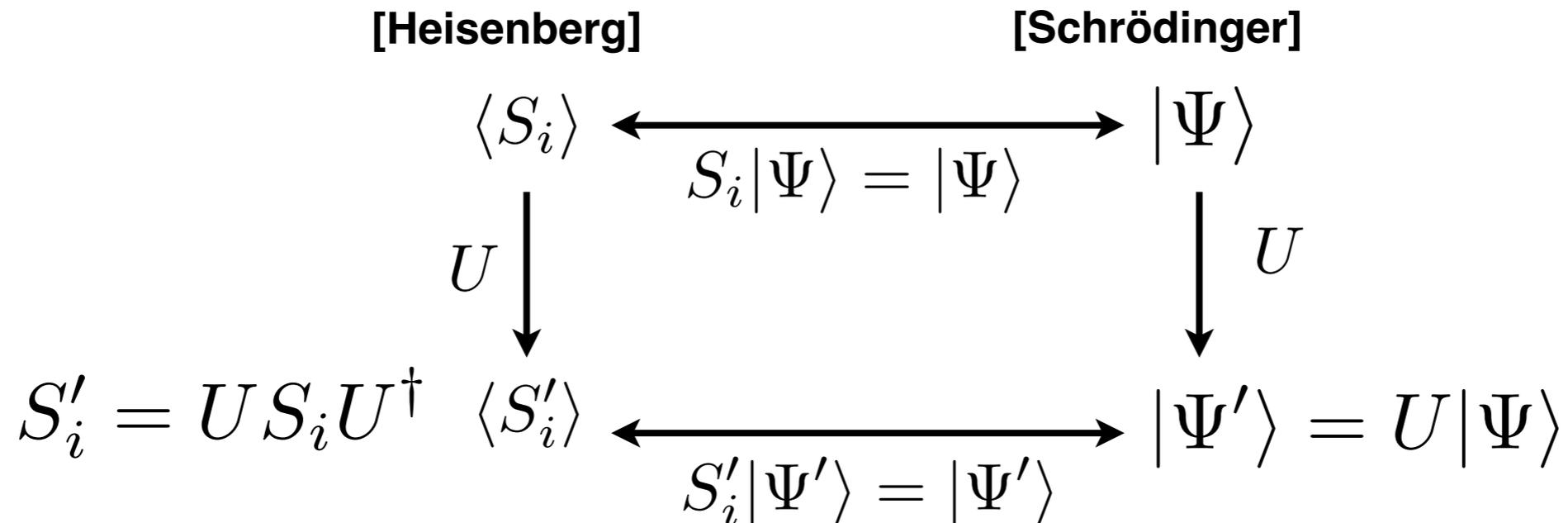
Input : Pauli演算子の固有状態.

Operation : Clifford演算

Measurement : Pauli基底

➡ Classically simulatable!

n qubit stabilizer state \rightarrow n 個の演算子



Gottesman-Knillの定理

(Clifford演算だと classically simulatable)

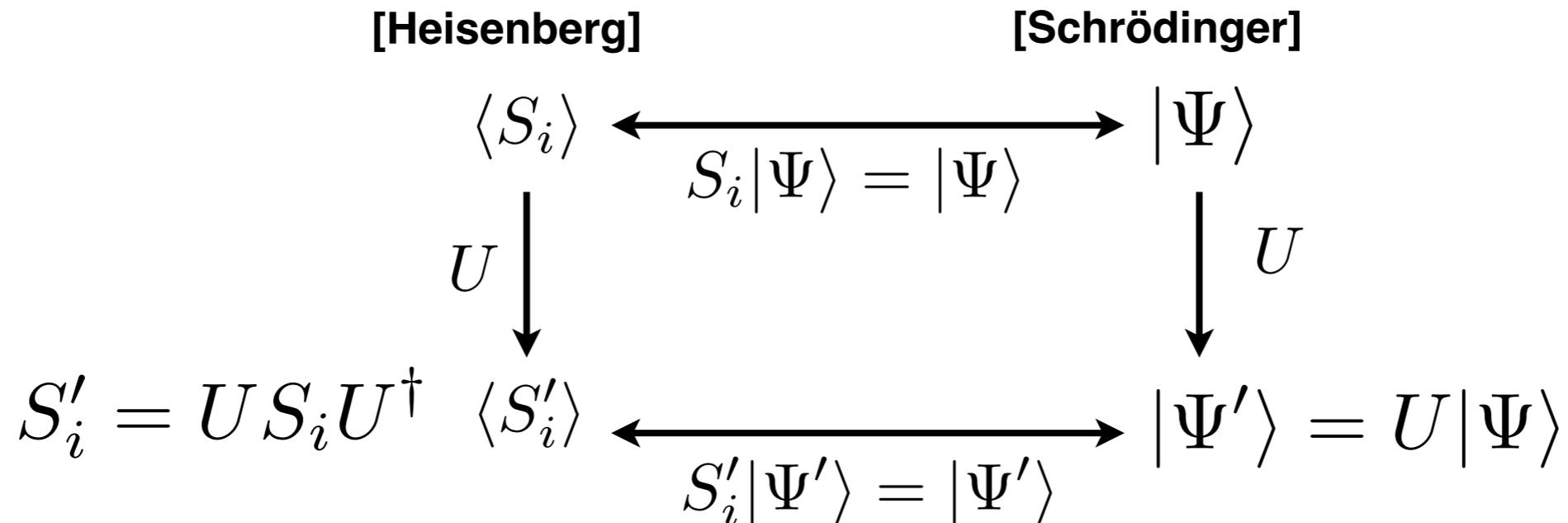
Input : Pauli演算子の固有状態.

Operation : Clifford演算

Measurement : Pauli基底

➡ Classically simulatable!

n qubit stabilizer state \rightarrow n 個の演算子



観測量 (Pauli演算子) と stabilizer との交換関係から,

確率分布を効率よく計算できる \rightarrow **Gottesman-Knillの定理**

Magic state

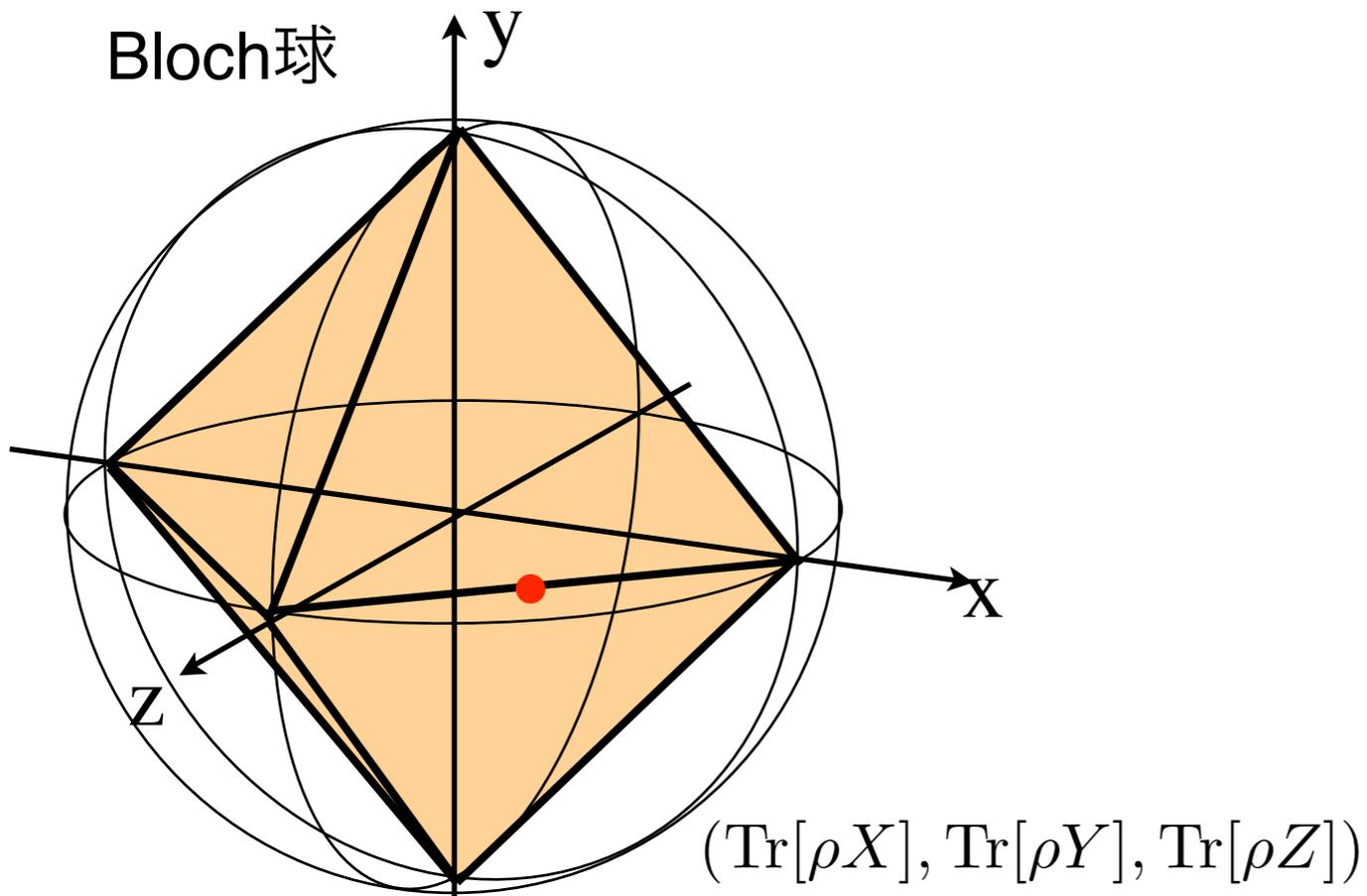
(noisy magic state is enough for universal QC)

INPUT : ~~Pauli演算子の固有状態~~ → **一般の混合状態**

OPERATION : Clifford回路

MEASUREMENT : Pauli基底

→ Pauli演算子の固有状態の混合は classically simulatable

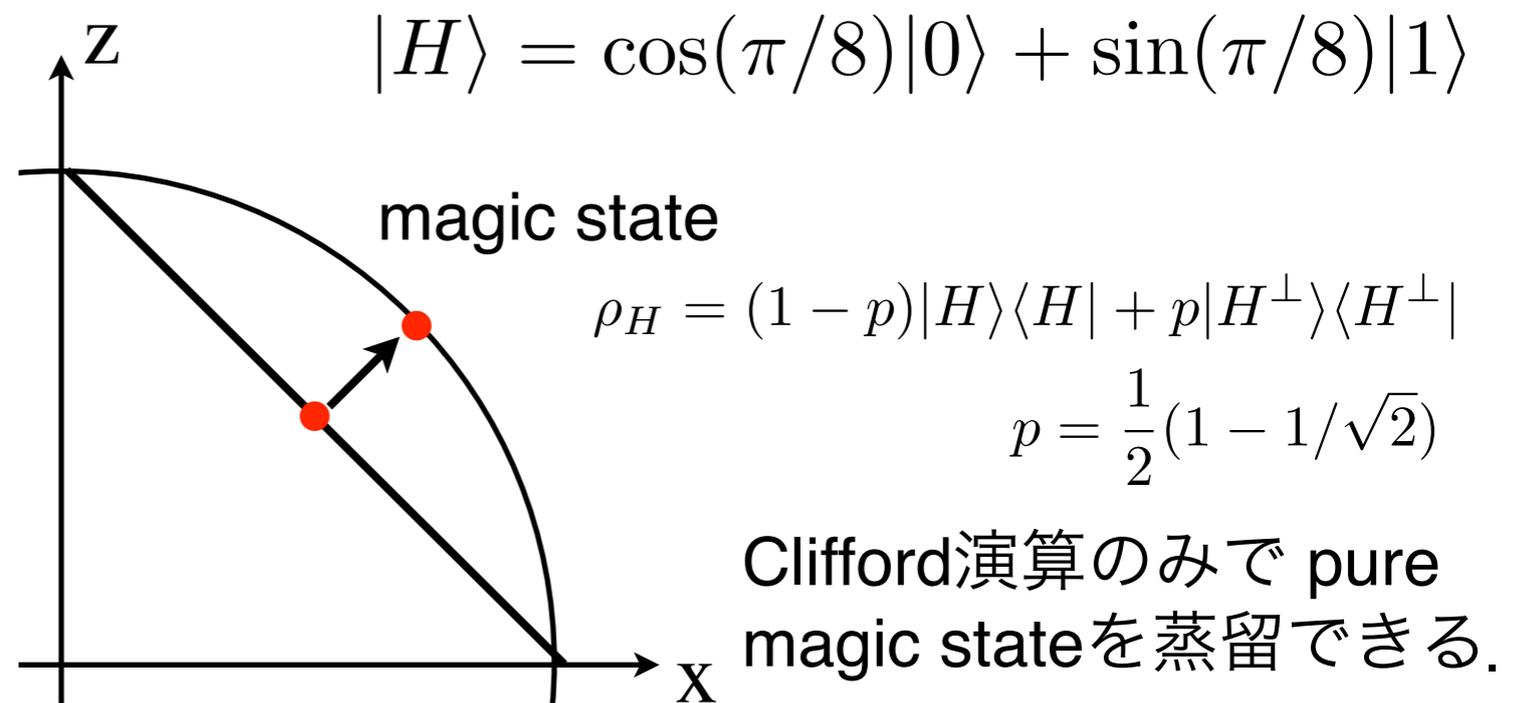
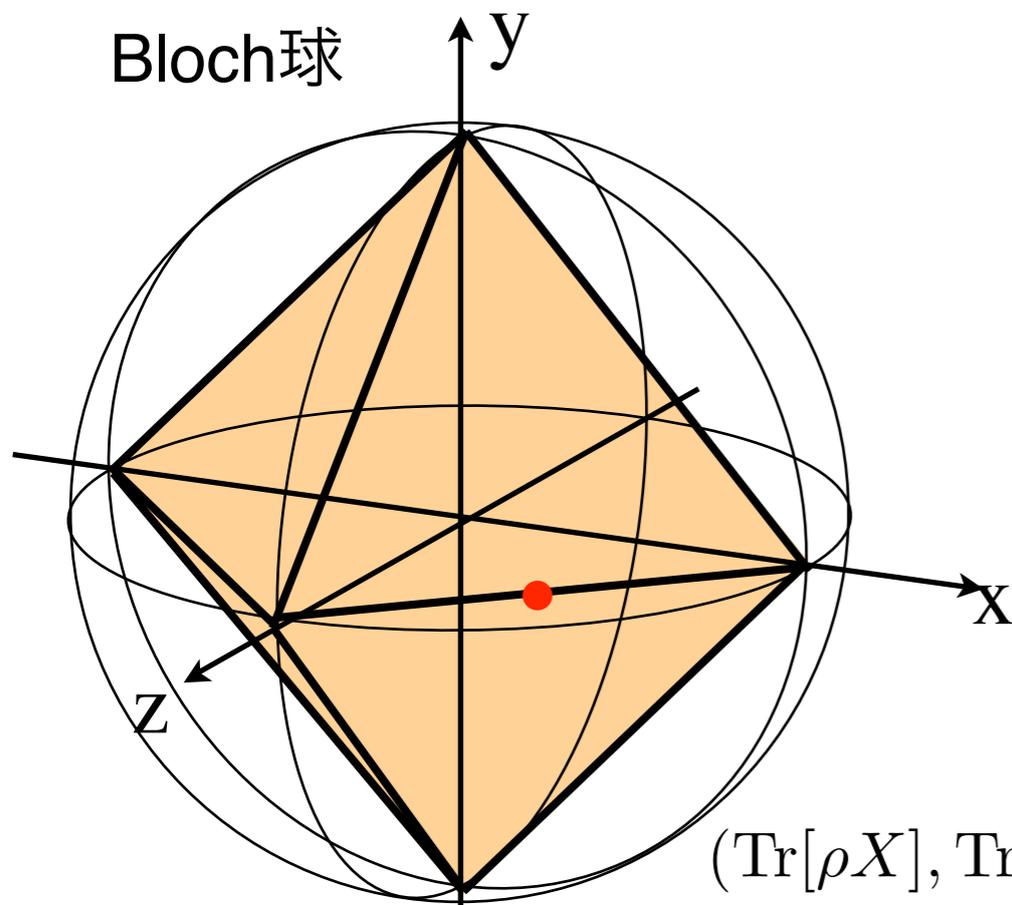


Magic state

(noisy magic state is enough for universal QC)

- INPUT : ~~Pauli演算子の固有状態~~ → **一般の混合状態**
OPERATION : Clifford回路
MEASUREMENT : Pauli基底

→ Pauli演算子の固有状態の混合は classically simulatable



Bravyi-Kitaev, PRA 71, 022316 (2005);
Reichardt, QIP 4, 251 (2005)

目次

✓ 量子計算

Pauli演算子, ブロッホ球, Clifford演算子, non-Clifford演算,
Solovay-Kitaevアルゴリズム, 直積空間, CNOT演算, 万能量子計算

✓ スタビライザー形式

スタビライザー群, Clifford演算, Gottesman-Knillの定理, マジック状態

✓ 測定型量子計算

グラフ状態 (クラスター状態), 量子テレポーテーション, 様々な応用

Graph state (cluster state)

◆ Graph state

stabilizer generators:

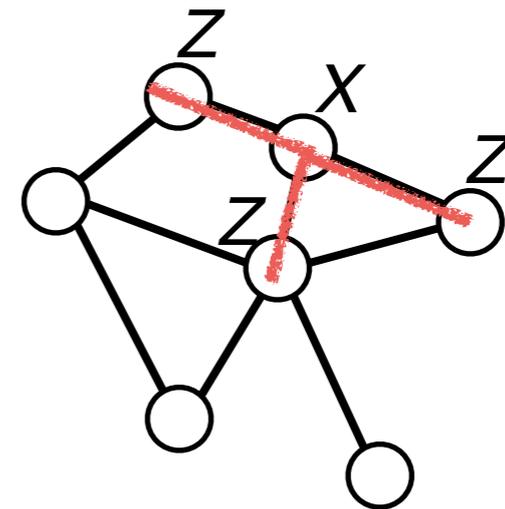
$$K_i = X_i \prod_{j \in V_i} Z_j$$

$j \in V_i$ 点*i*と隣接する頂点の集合

$$K_i |G\rangle = |G\rangle \text{ for all } i \in V$$

graph $G=(V,E)$

V :頂点の集合, E :辺の集合



Graph state (cluster state)

◆ Graph state

stabilizer generators:

$$K_i = X_i \prod_{j \in V_i} Z_j$$

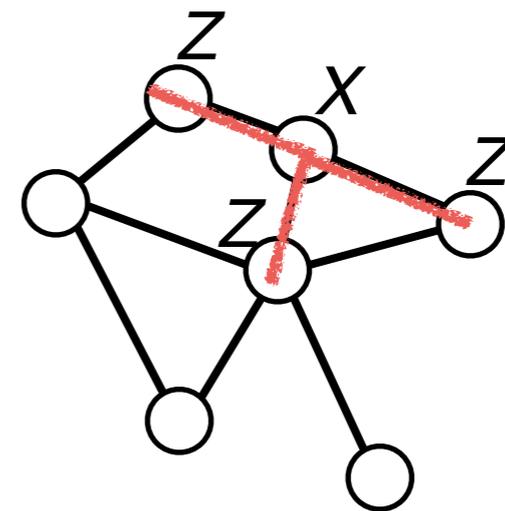
点*i*と隣接する頂点の集合

$$K_i |G\rangle = |G\rangle \text{ for all } i \in V$$

$$\Leftrightarrow |G\rangle = \prod_{e \in E} \Lambda_e(Z) |+\rangle^{\otimes |V|}$$

graph $G=(V,E)$

V :頂点の集合, E :辺の集合



Graph state (cluster state)

◆ Graph state

stabilizer generators:

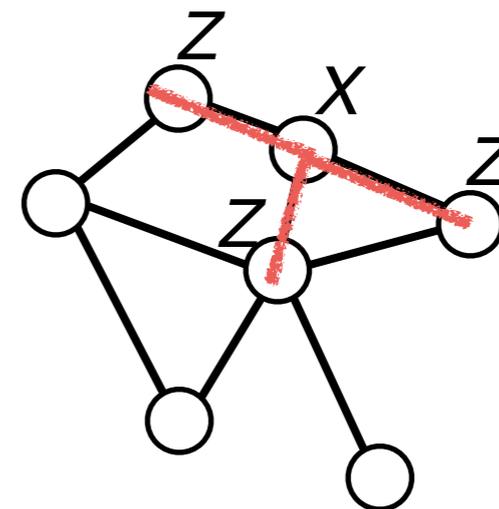
$$K_i = X_i \prod_{j \in V_i} Z_j$$

$j \in V_i$ 点 i と隣接する頂点の集合

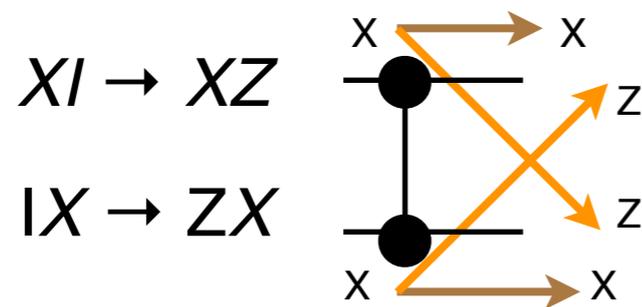
$$K_i |G\rangle = |G\rangle \text{ for all } i \in V$$

graph $G=(V,E)$

V :頂点の集合, E :辺の集合



$$\Leftrightarrow |G\rangle = \prod_{e \in E} \Lambda_e(Z) |+\rangle^{\otimes |V|}$$



$$= |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes Z$$

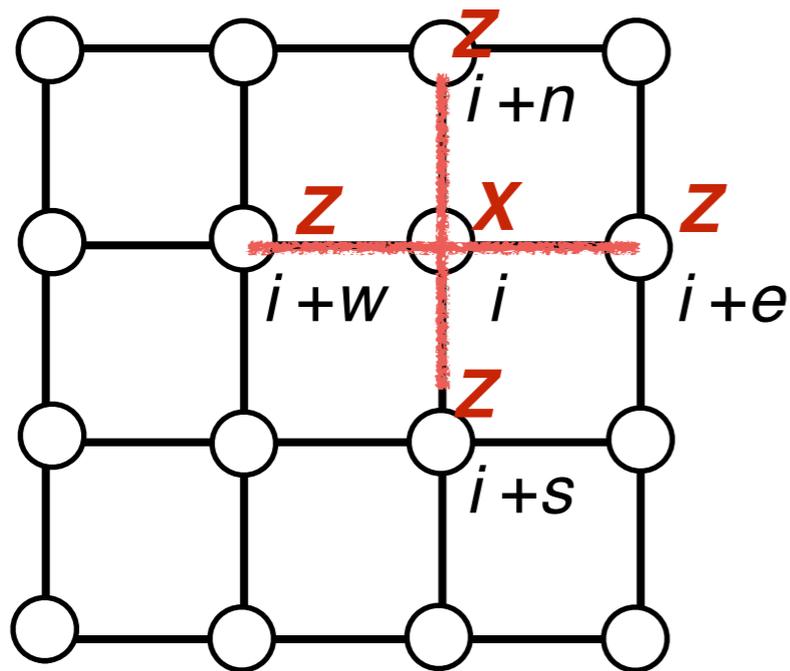
$$e^{-i\pi/4(Z_1 Z_2 - Z_1 - Z_2 - I)}$$

CZ (controlled Z)

Cluster state computation

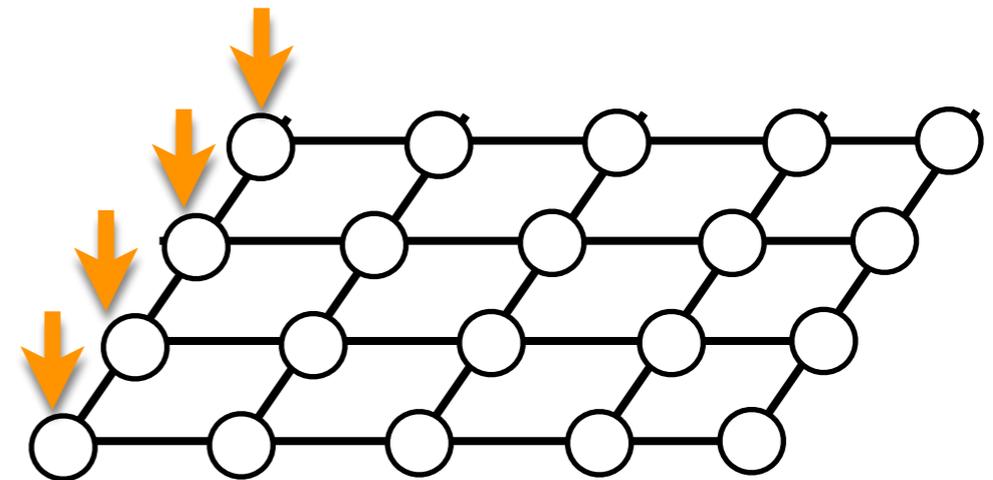
Raussendorf-Briegel PRL 86 910 (2001); Raussendorf-Browne-Briegel PRA 68 022312 (2003).

◆ 2D cluster state



$$K_i = X_i Z_{i+n} Z_{i+e} Z_{i+s} Z_{i+w}$$

projective measurement

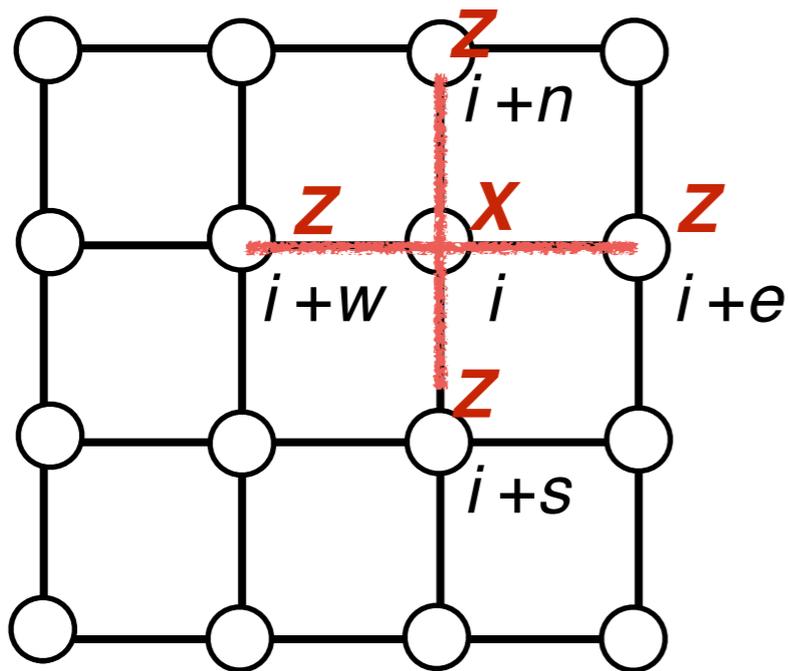


2D resource state

Cluster state computation

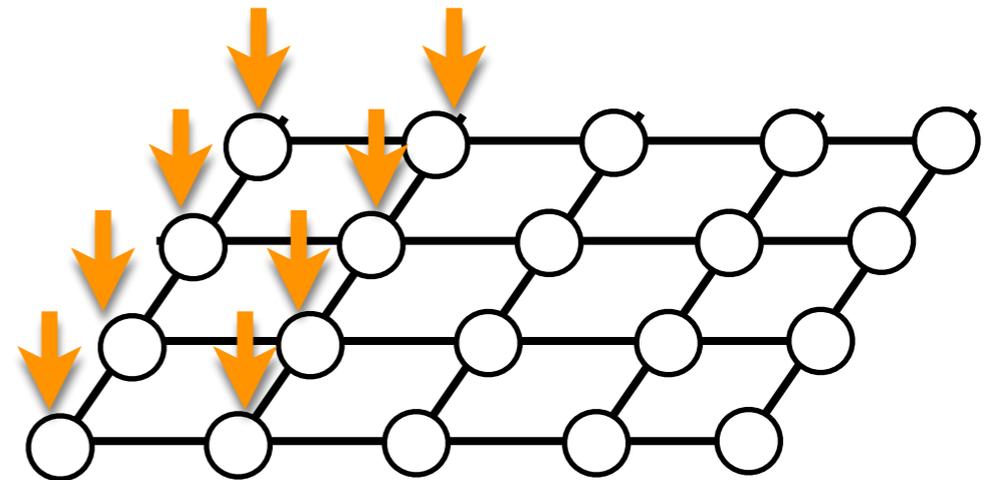
Raussendorf-Briegel PRL 86 910 (2001); Raussendorf-Browne-Briegel PRA 68 022312 (2003).

◆ 2D cluster state



$$K_i = X_i Z_{i+n} Z_{i+e} Z_{i+s} Z_{i+w}$$

projective measurement

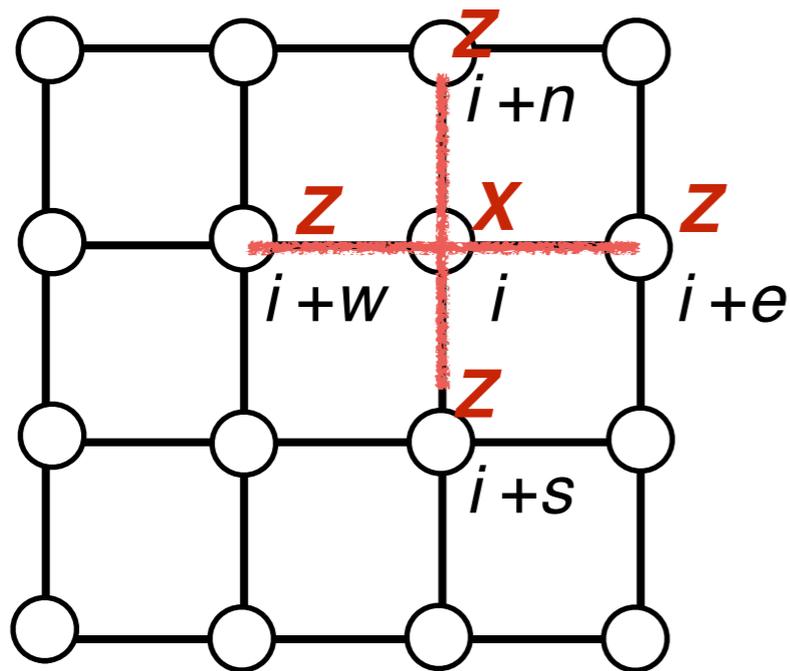


2D resource state

Cluster state computation

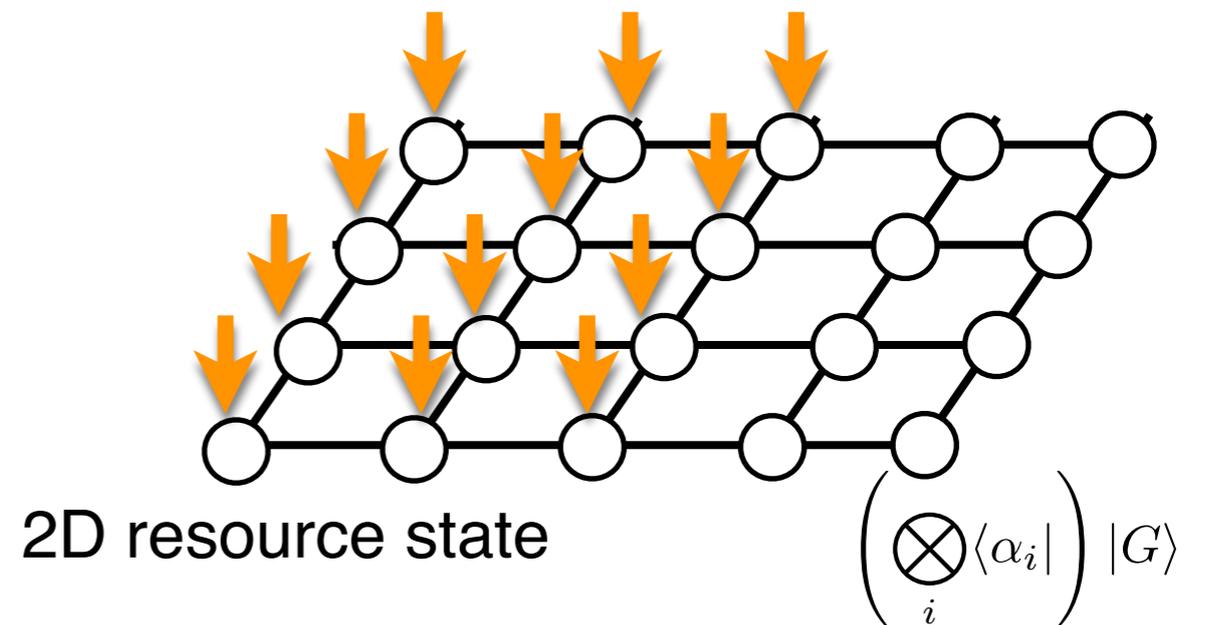
Raussendorf-Briegel PRL 86 910 (2001); Raussendorf-Browne-Briegel PRA 68 022312 (2003).

◆ 2D cluster state



$$K_i = X_i Z_{i+n} Z_{i+e} Z_{i+s} Z_{i+w}$$

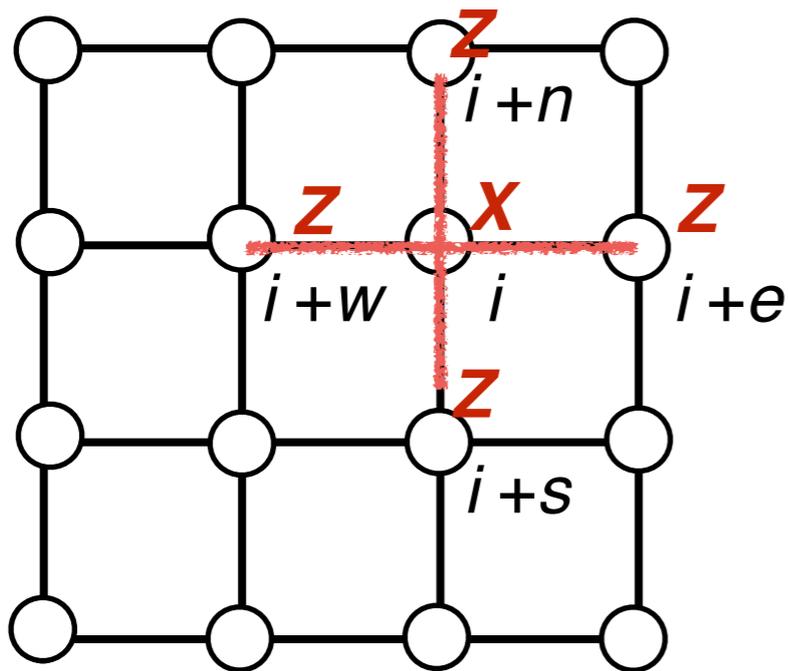
projective measurement



Cluster state computation

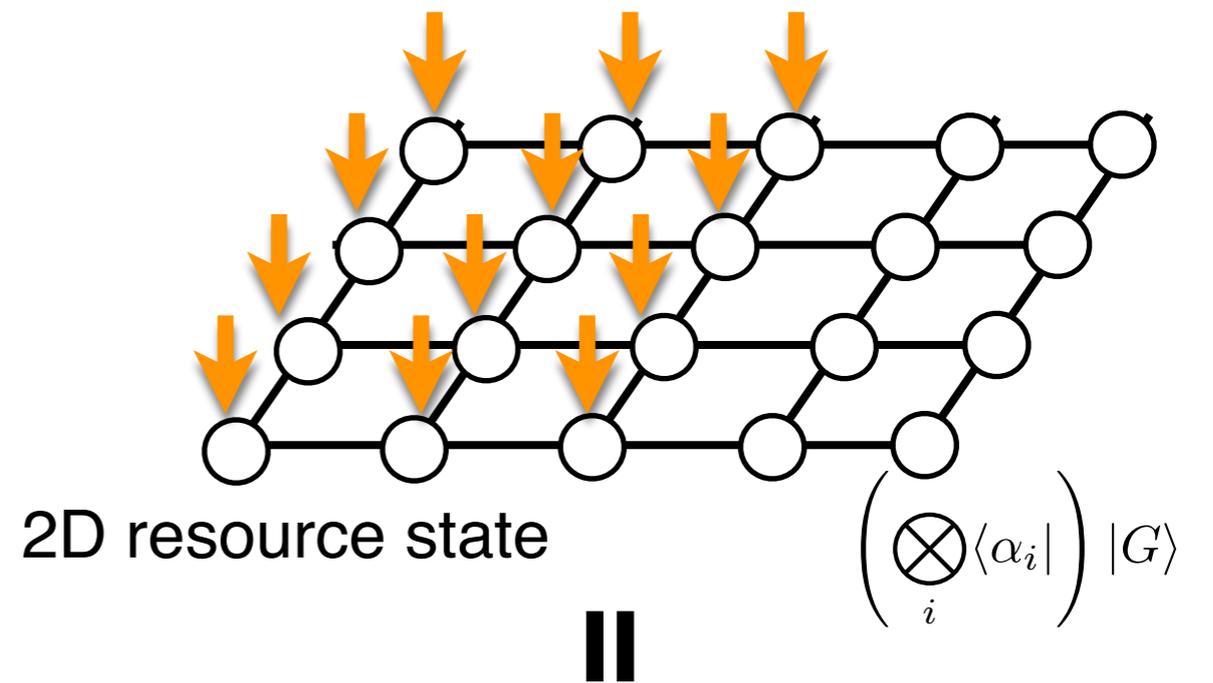
Raussendorf-Briegel PRL 86 910 (2001); Raussendorf-Browne-Briegel PRA 68 022312 (2003).

◆ 2D cluster state

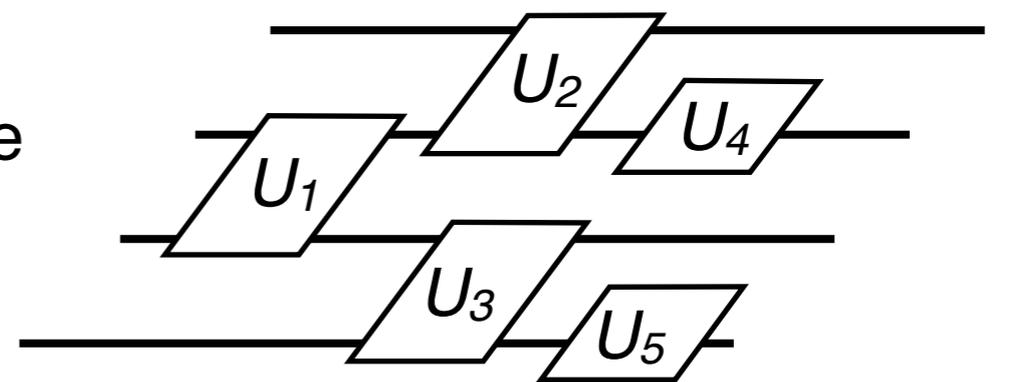


$$K_i = X_i Z_{i+n} Z_{i+e} Z_{i+s} Z_{i+w}$$

projective measurement



space



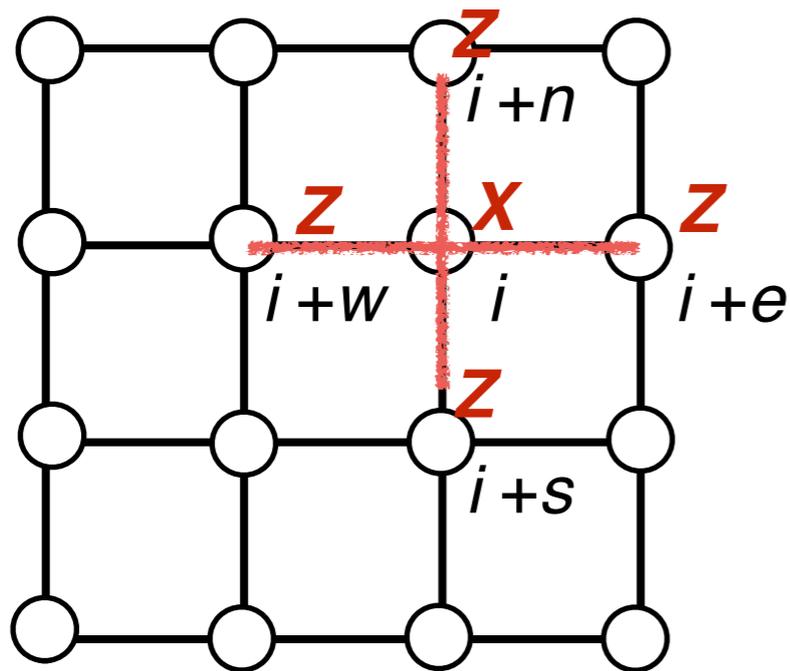
time

$$\langle 0 |^{\otimes N} U_n \cdots U_1 | 0 \rangle^{\otimes N}$$

Cluster state computation

Raussendorf-Briegel PRL 86 910 (2001); Raussendorf-Browne-Briegel PRA 68 022312 (2003).

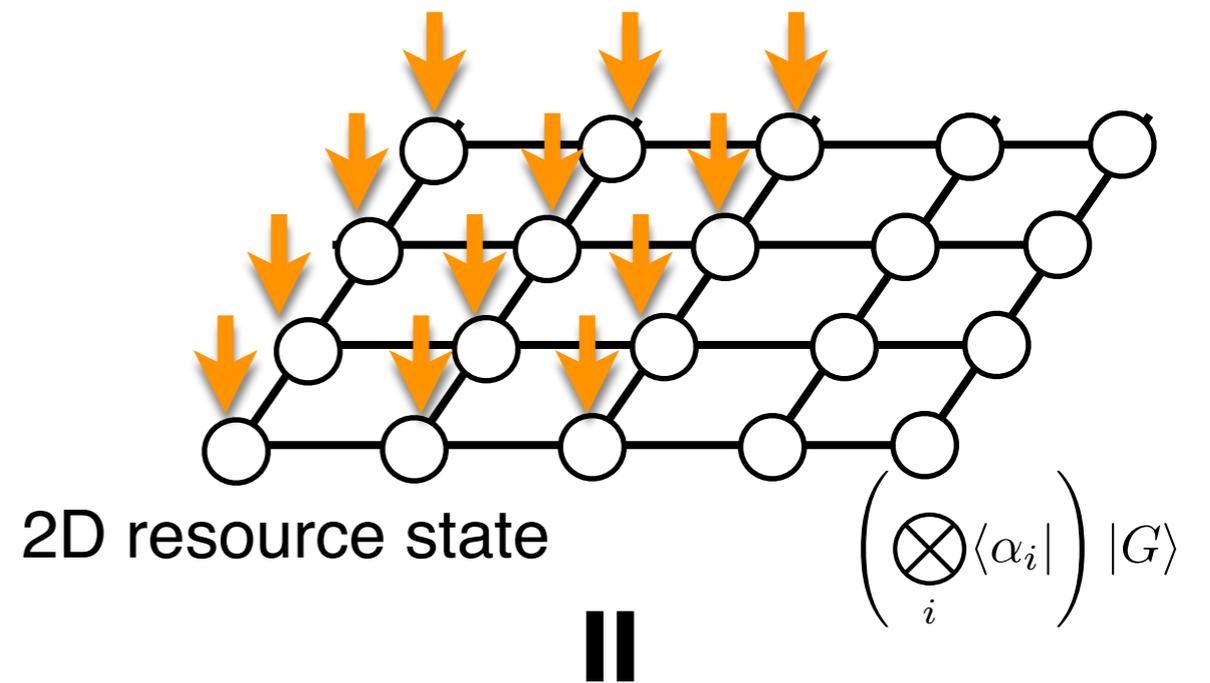
◆ 2D cluster state



$$K_i = X_i Z_{i+n} Z_{i+e} Z_{i+s} Z_{i+w}$$

- 相互作用は状態準備のときのみ.
- 物性物理との対応.
- 状態の性質から量子計算の能力を評価.

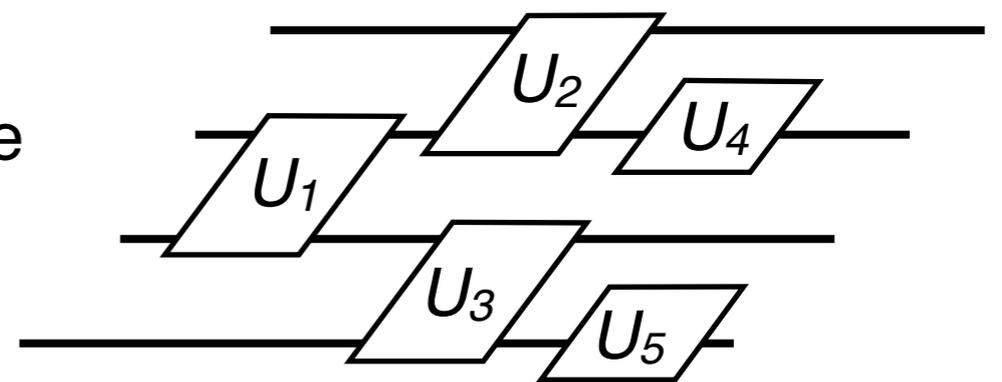
projective measurement



2D resource state

$$\left(\bigotimes_i \langle \alpha_i | \right) |G\rangle$$

space



time

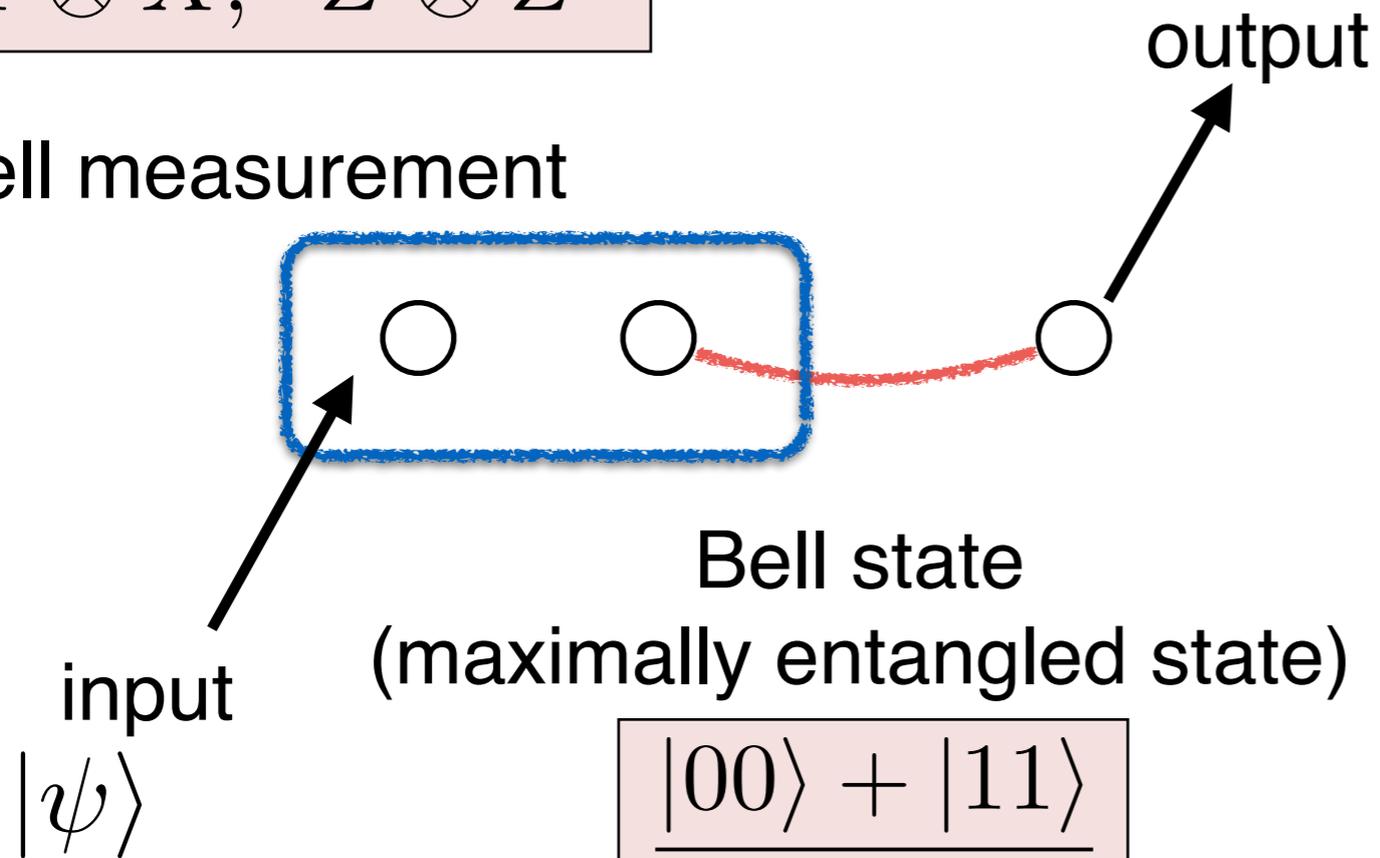
$$\langle 0 |^{\otimes N} U_n \cdots U_1 | 0 \rangle^{\otimes N}$$

量子テレポーテーション

[Bennet et al., PRL '93]

$$X \otimes X, Z \otimes Z$$

Bell measurement



Bell state
(maximally entangled state)

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

=

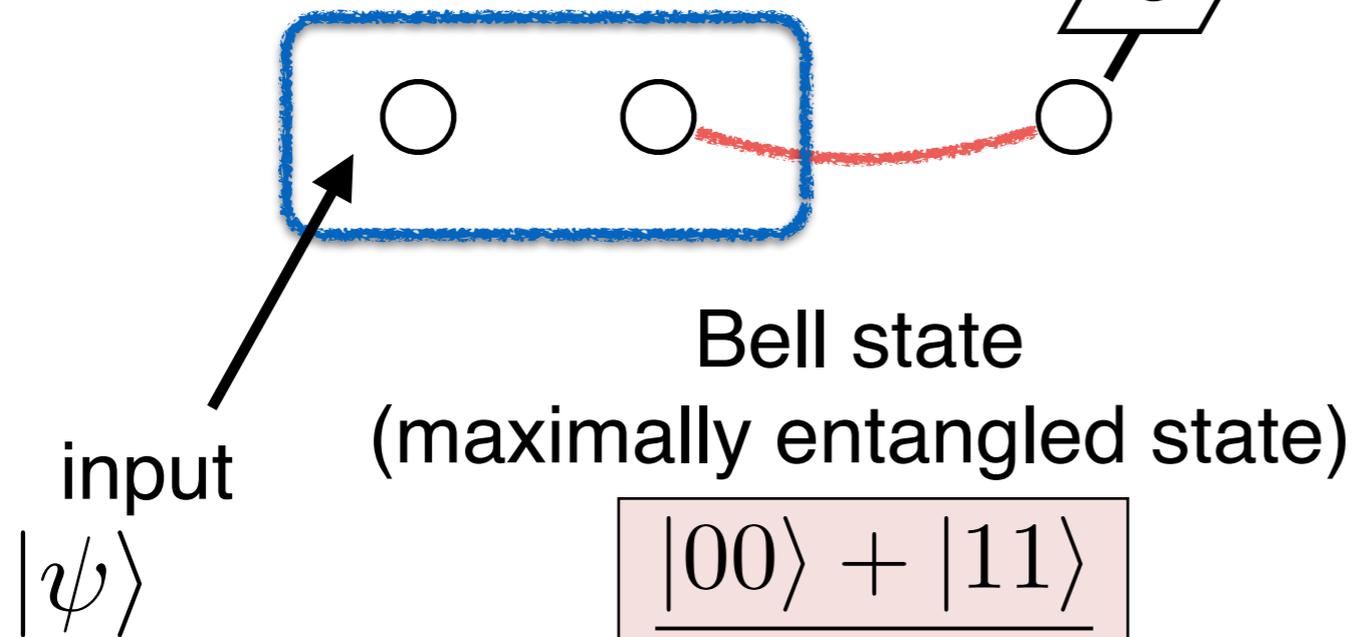
identity gate

量子テレポーテーション

[Bennet et al., PRL '93]

$$X \otimes X, Z \otimes Z$$

Bell measurement



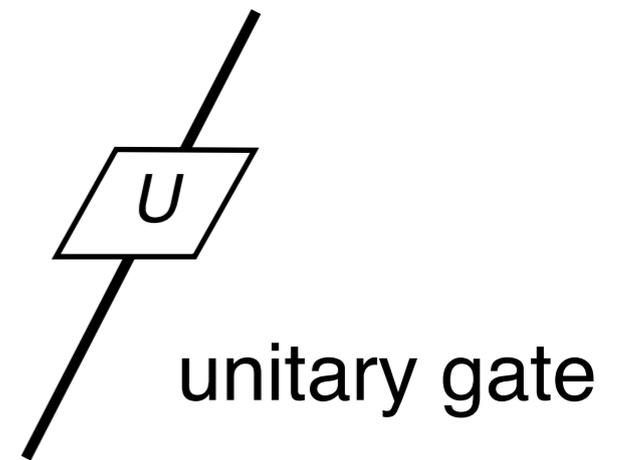
Bell state
(maximally entangled state)

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$U X^{m_1} Z^{m_2} |\psi\rangle$$

output

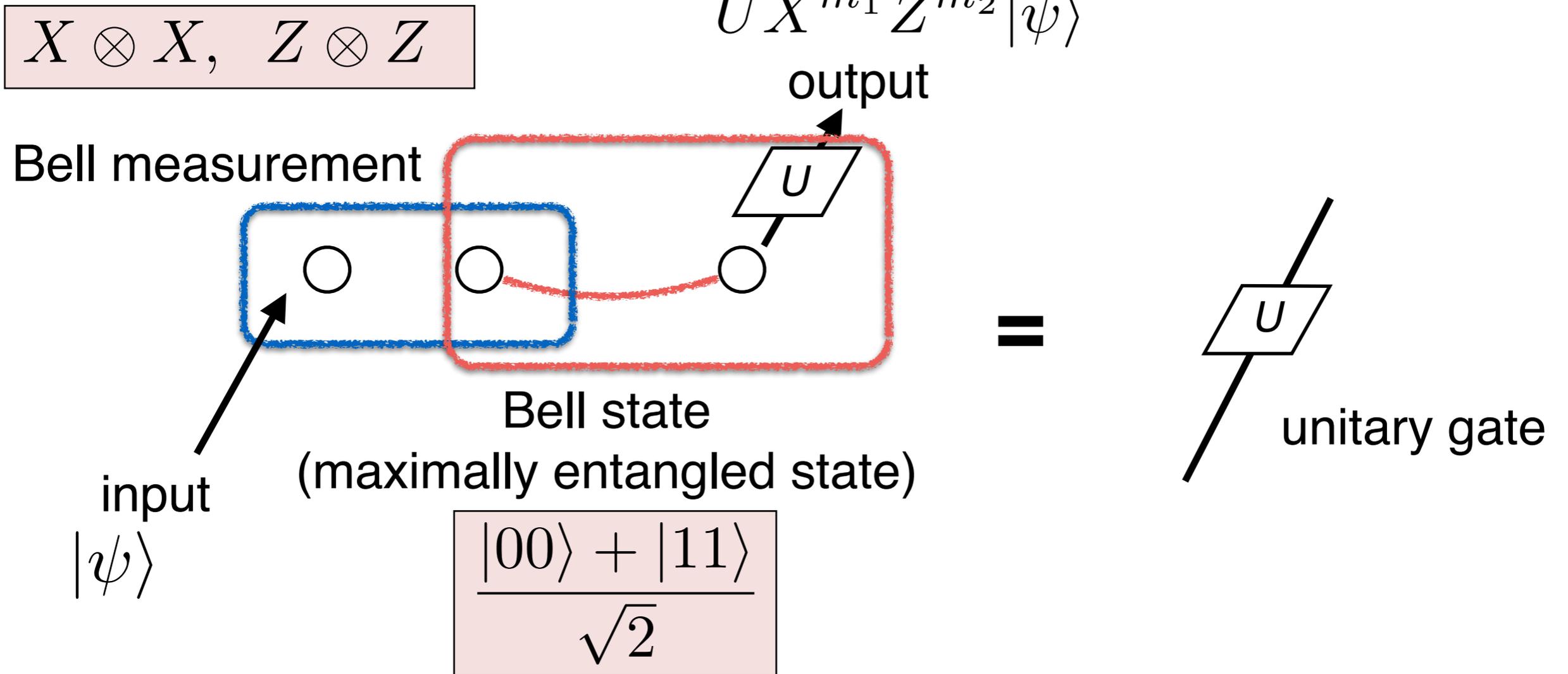
=



unitary gate

量子テレポーテーション

[Bennet et al., PRL '93]

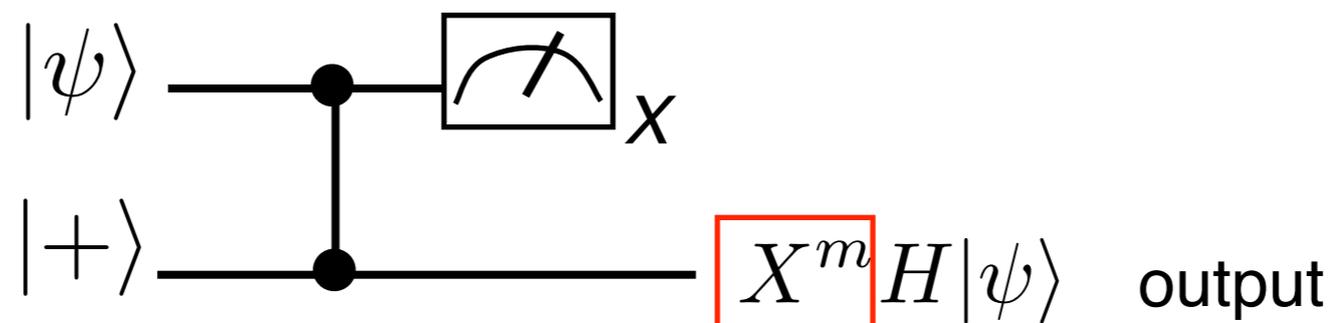


リソース状態 + 測定 = ユニタリー演算

One-bit teleportation

- ◆ one-bit teleportation : Zhou-Leung-Chuang, Phys. Rev. A 62,052316 (2000).

input

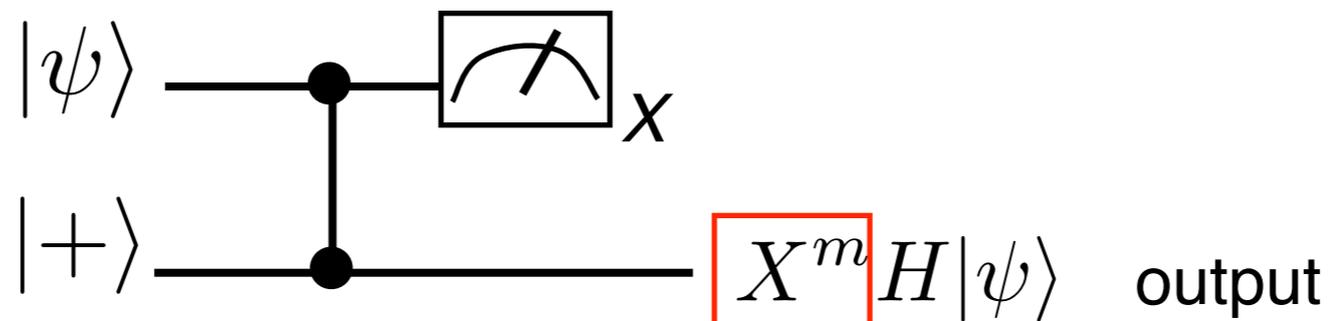


測定結果に依存してつく
“Pauli byproduct”

One-bit teleportation

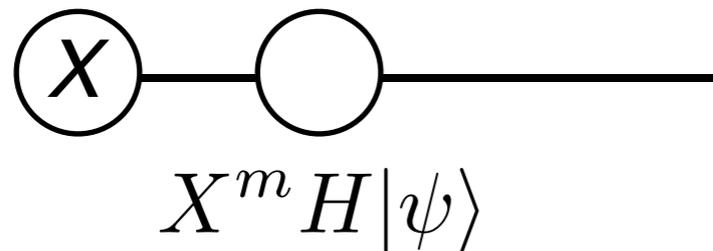
- ◆ one-bit teleportation : Zhou-Leung-Chuang, Phys. Rev. A 62,052316 (2000).

input



測定結果に依存してつく
“Pauli byproduct”

input state $|\psi\rangle$

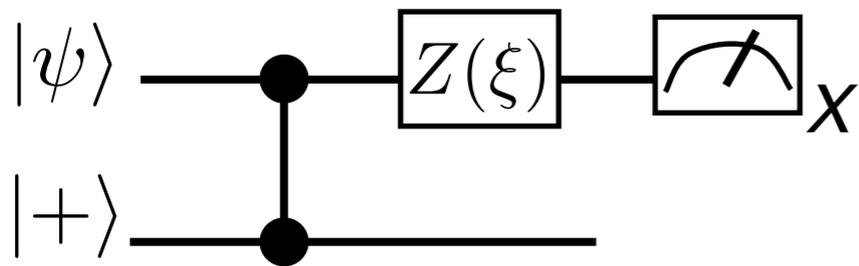


$$= |\psi\rangle \text{---} \boxed{H} \text{---} \boxed{X^m} \text{---} X^m H |\psi\rangle$$

circuit diagram

One-bit teleportation

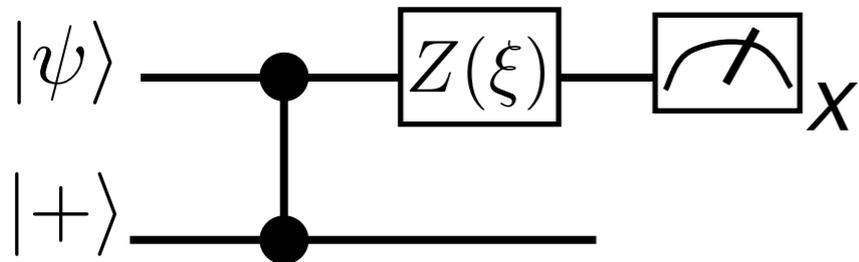
$$Z(\xi) = e^{-i\xi Z/2}$$



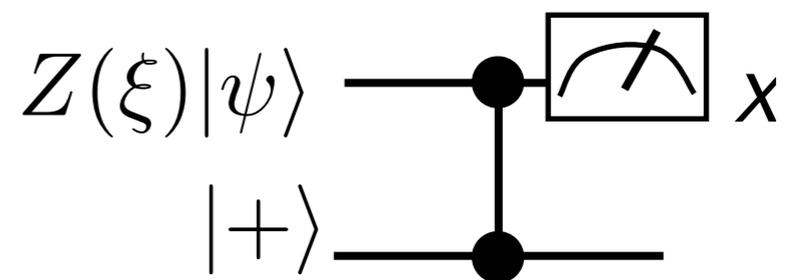
One-bit teleportation

$$Z(\xi) = e^{-i\xi Z/2}$$

← 可換



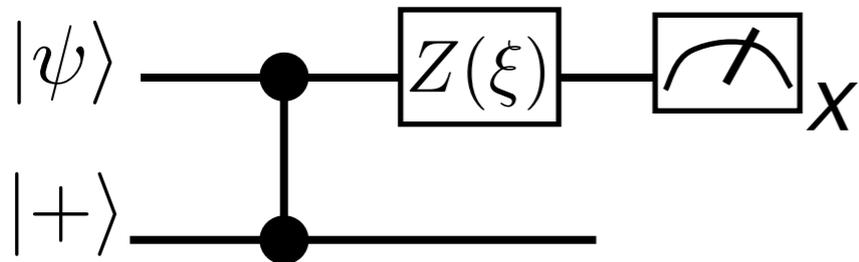
=



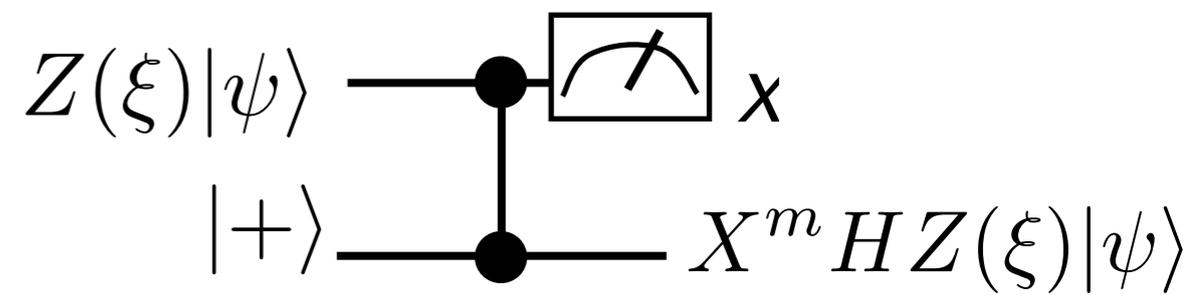
One-bit teleportation

$$Z(\xi) = e^{-i\xi Z/2}$$

← 可換



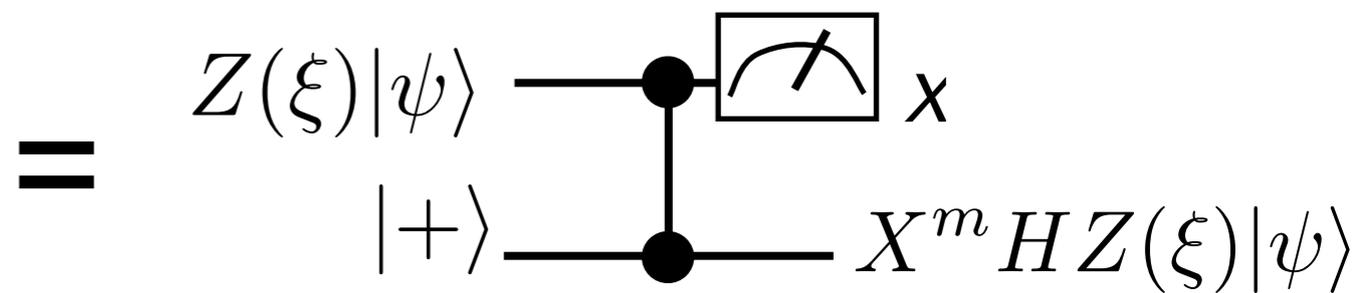
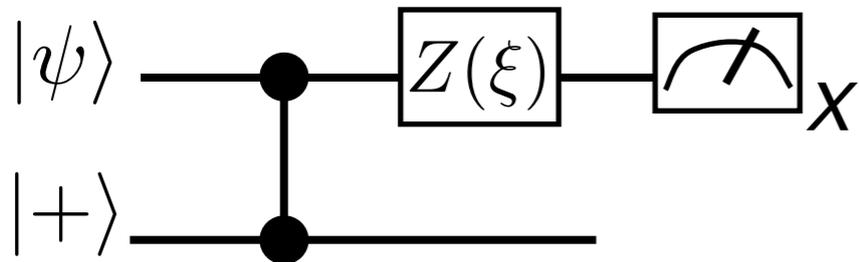
=



One-bit teleportation

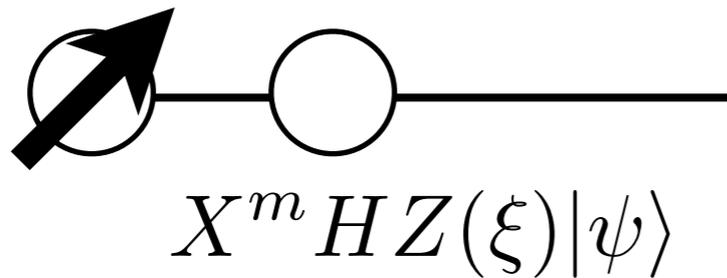
$$Z(\xi) = e^{-i\xi Z/2}$$

← 可換

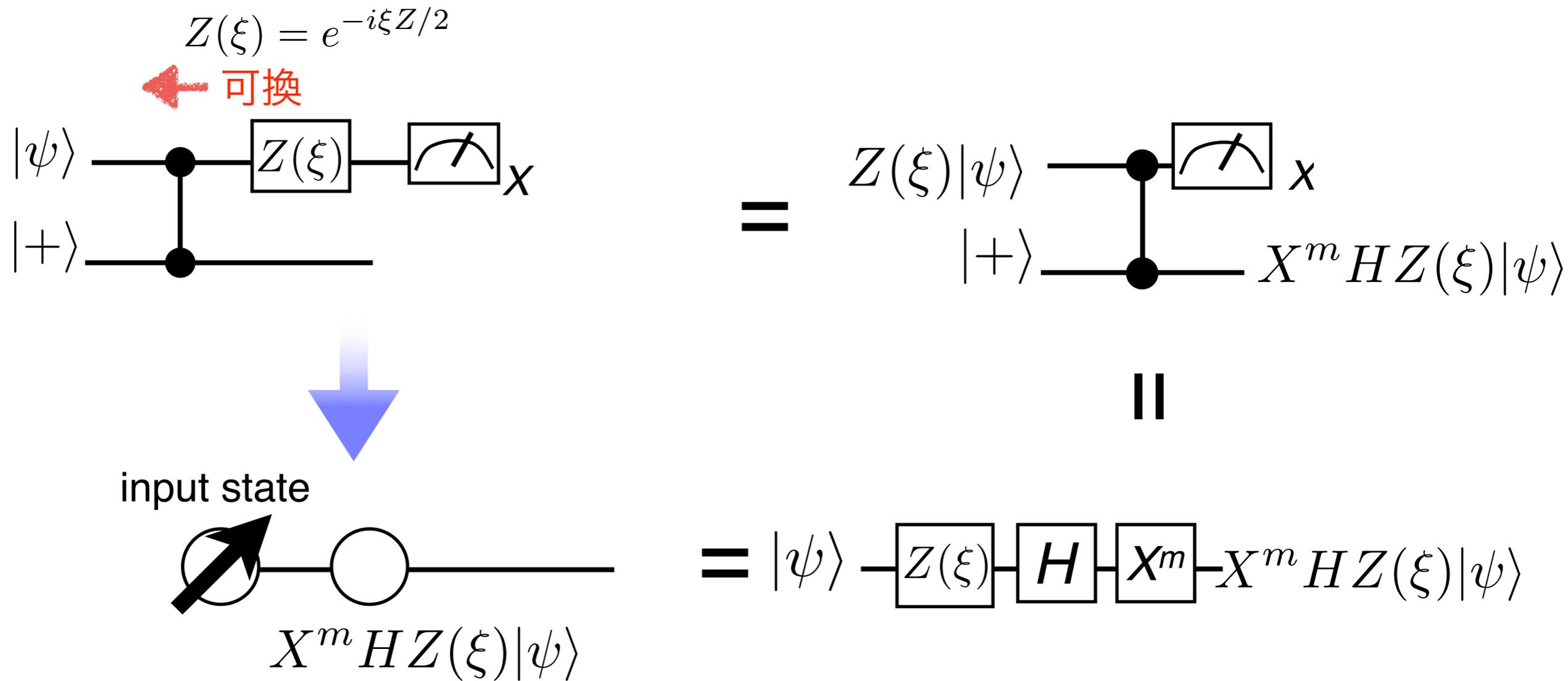


||

input state



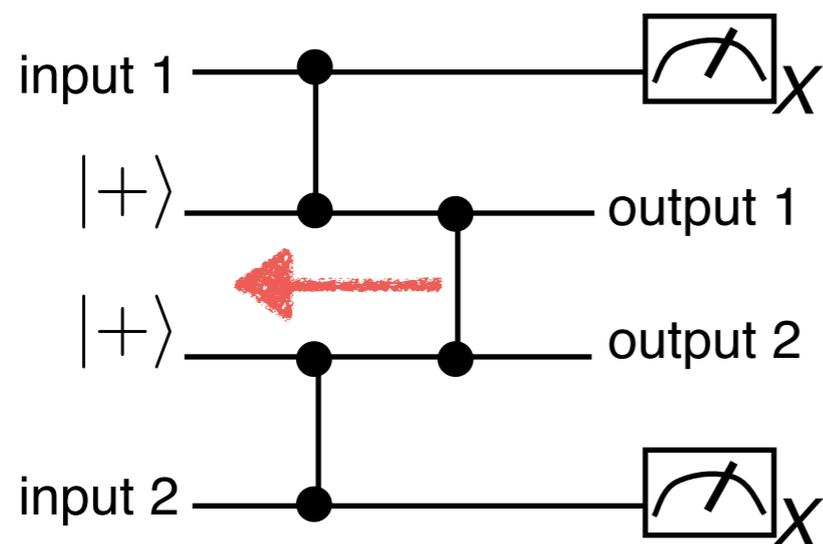
One-bit teleportation



1D cluster state → Hadamard gate, Z-rotation gate

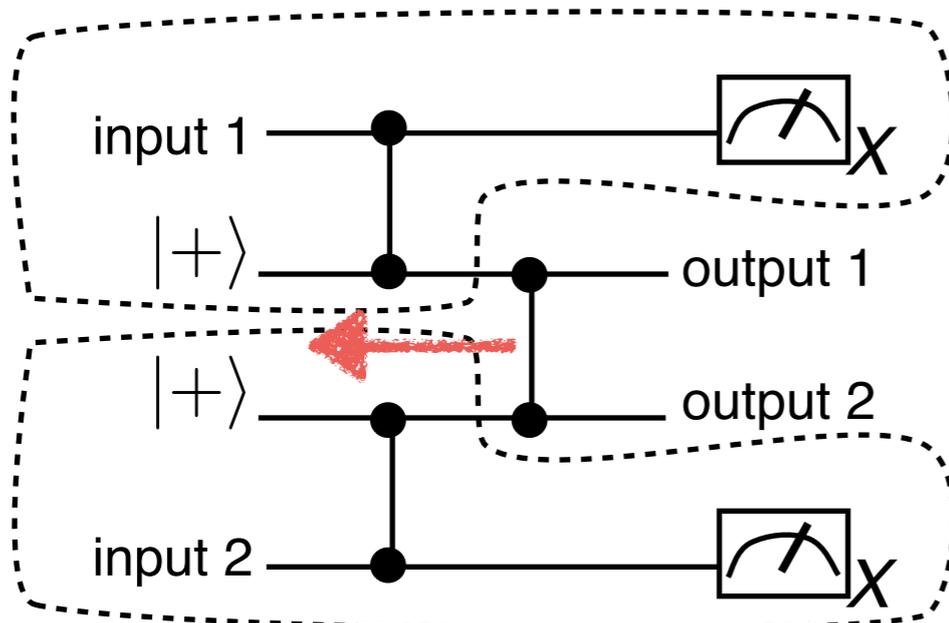
Gate teleportation

- ◆ Gate teleportation : D. Gottesman and I. L. Chuang, Nature (London) **402**, 390 (1999).

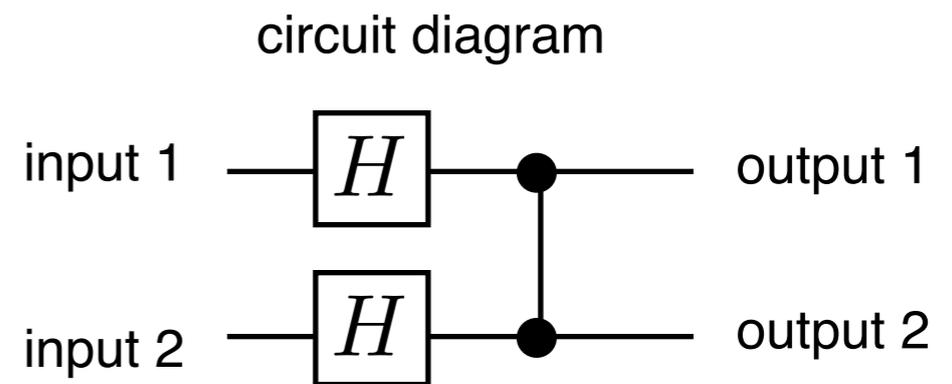


Gate teleportation

- ◆ Gate teleportation : D. Gottesman and I. L. Chuang, Nature (London) **402**, 390 (1999).

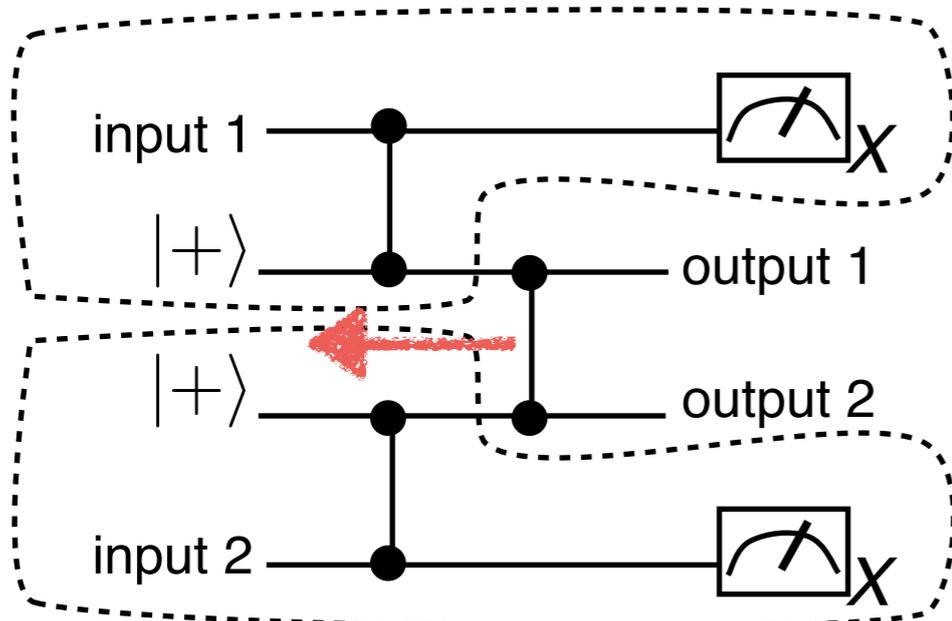


=

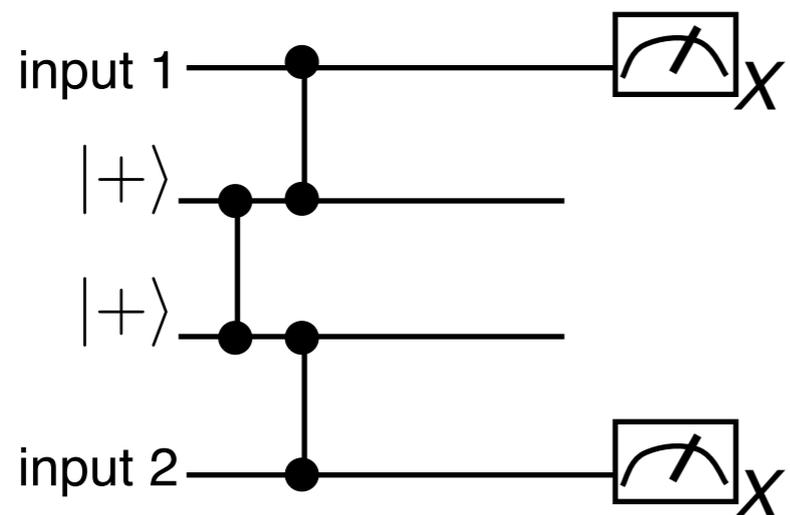


Gate teleportation

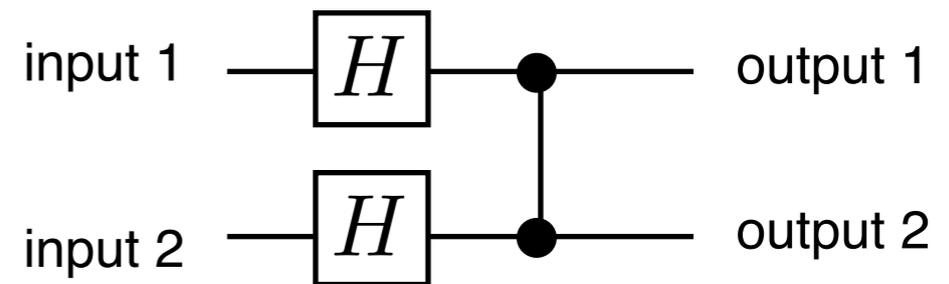
- ◆ Gate teleportation : D. Gottesman and I. L. Chuang, Nature (London) **402**, 390 (1999).



||

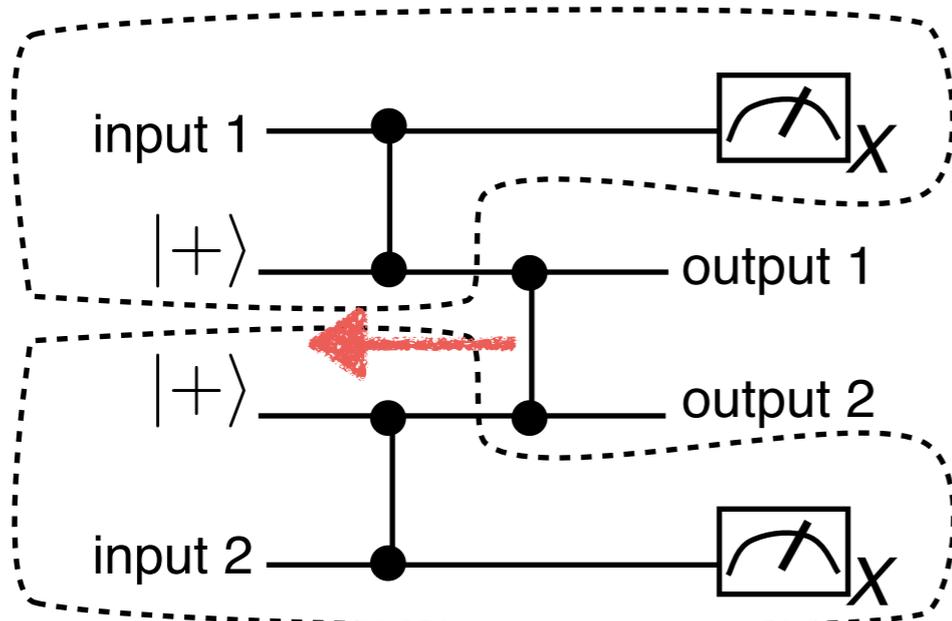


circuit diagram

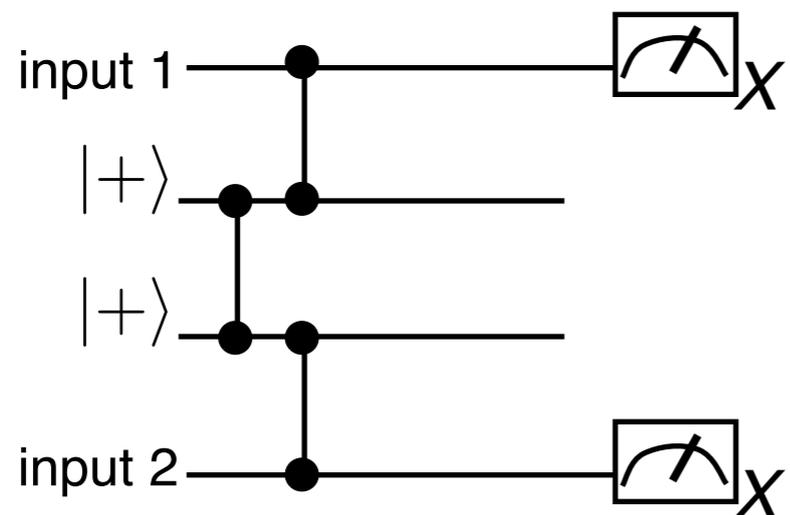


Gate teleportation

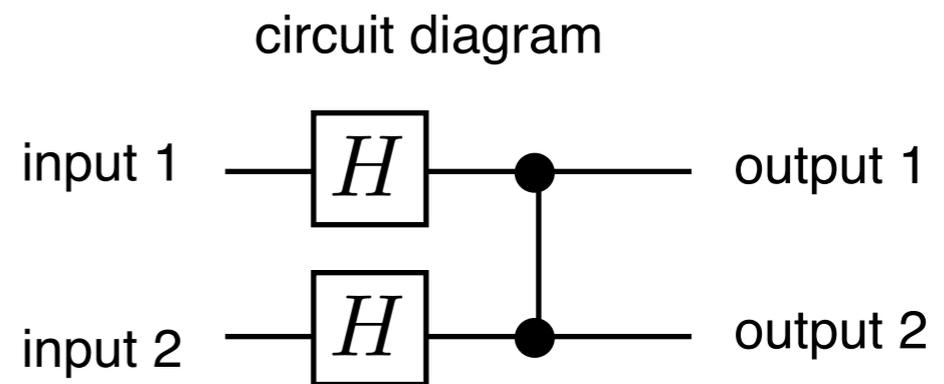
◆ Gate teleportation : D. Gottesman and I. L. Chuang, Nature (London) **402**, 390 (1999).



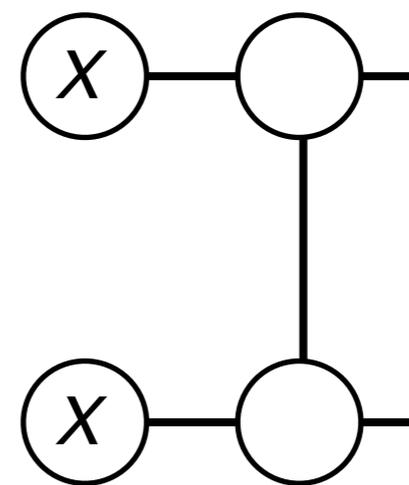
||



=

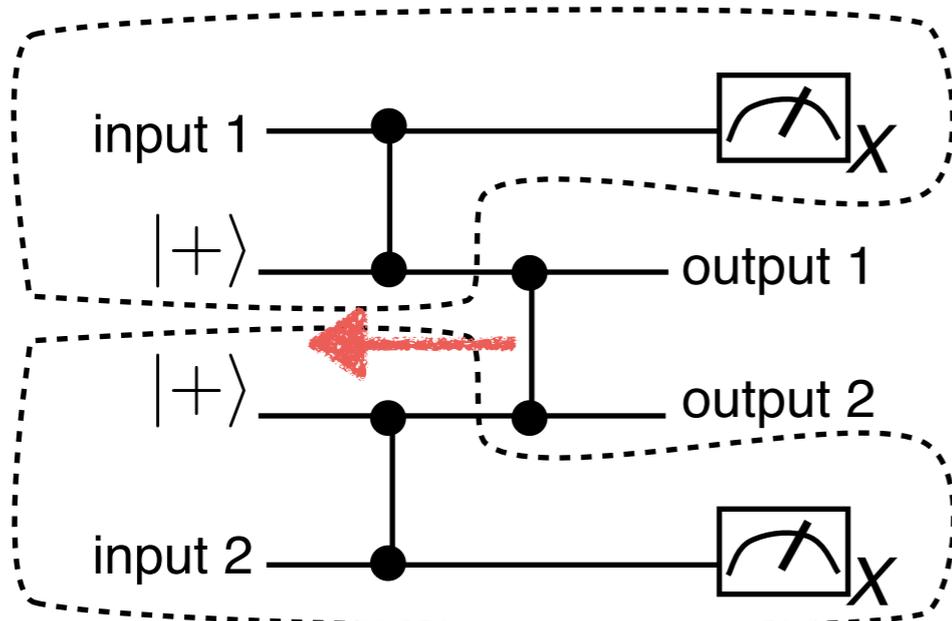


=

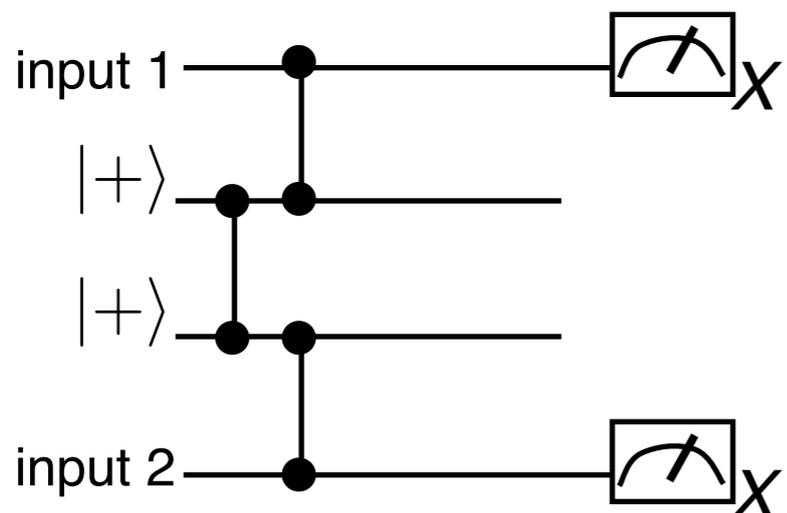


Gate teleportation

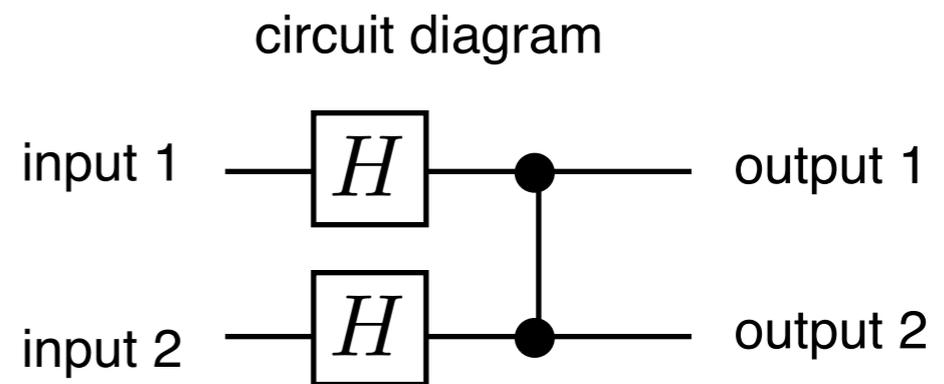
◆ Gate teleportation : D. Gottesman and I. L. Chuang, Nature (London) **402**, 390 (1999).



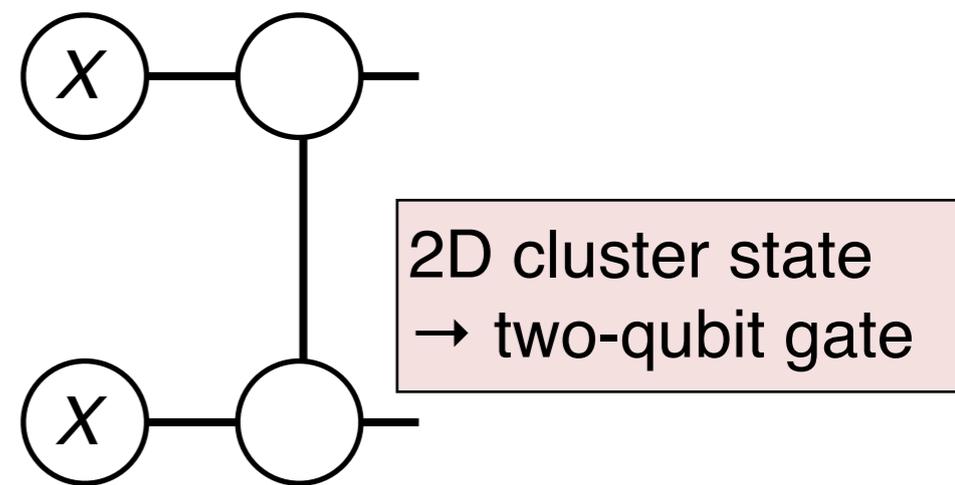
||



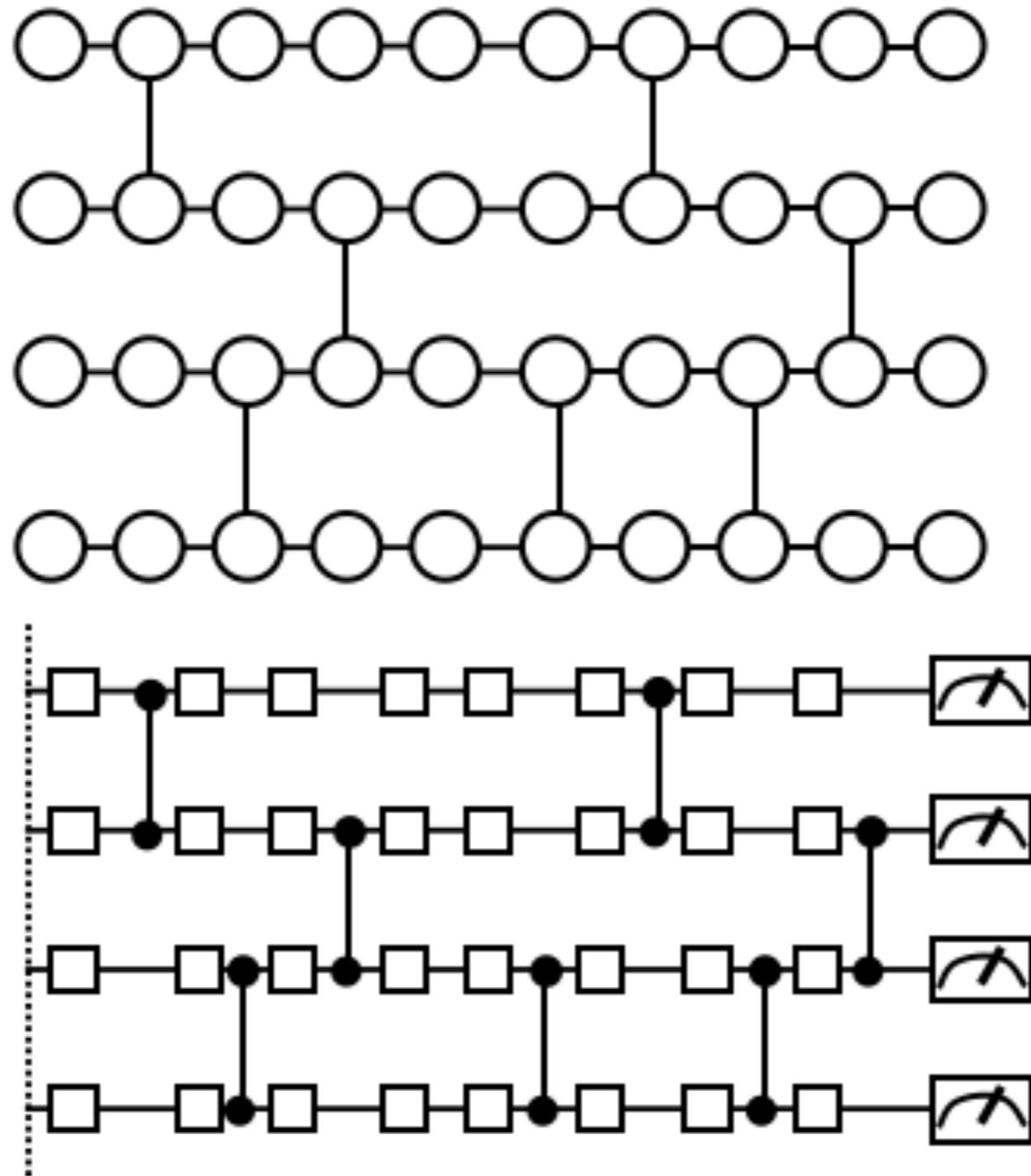
=



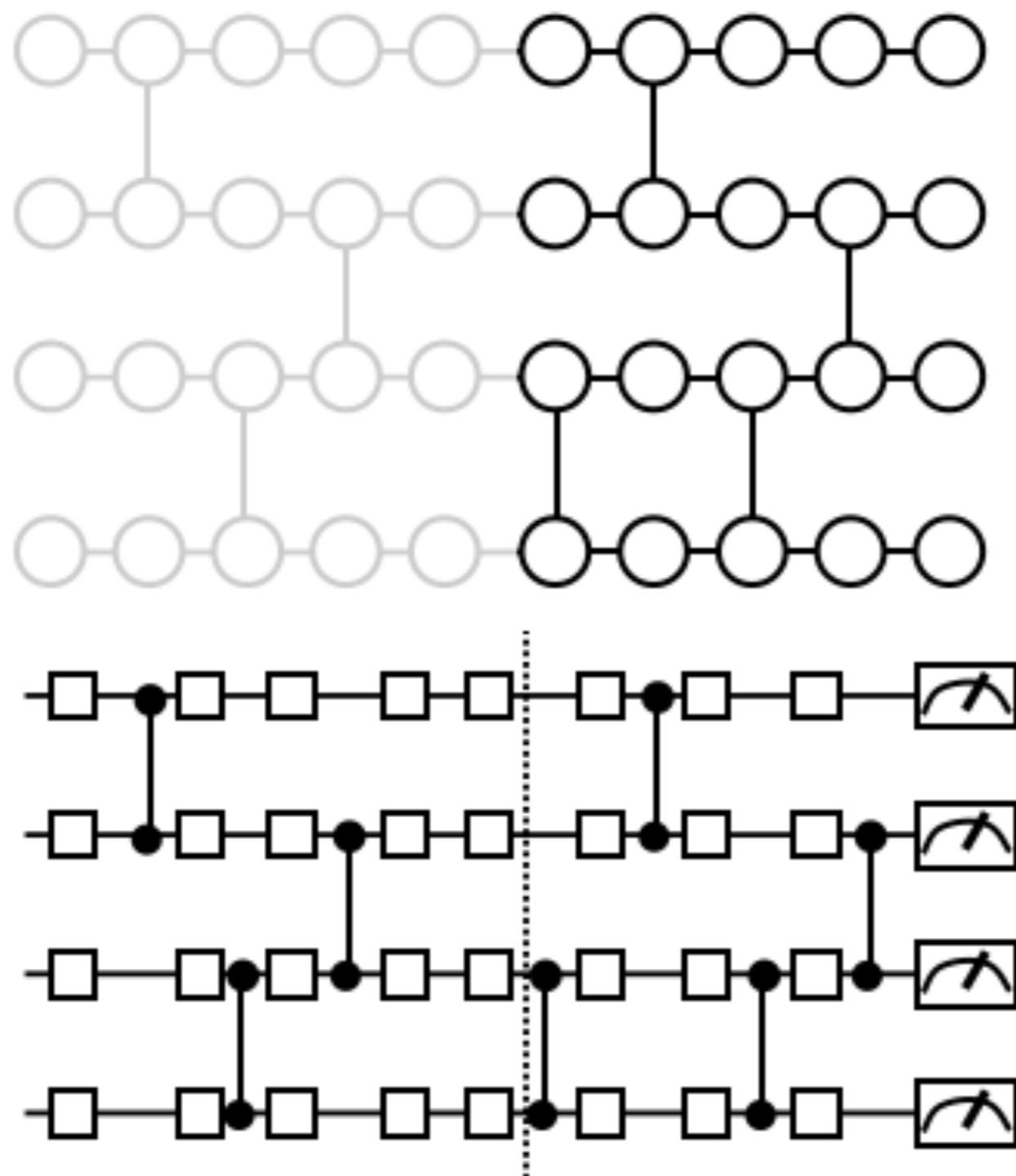
=



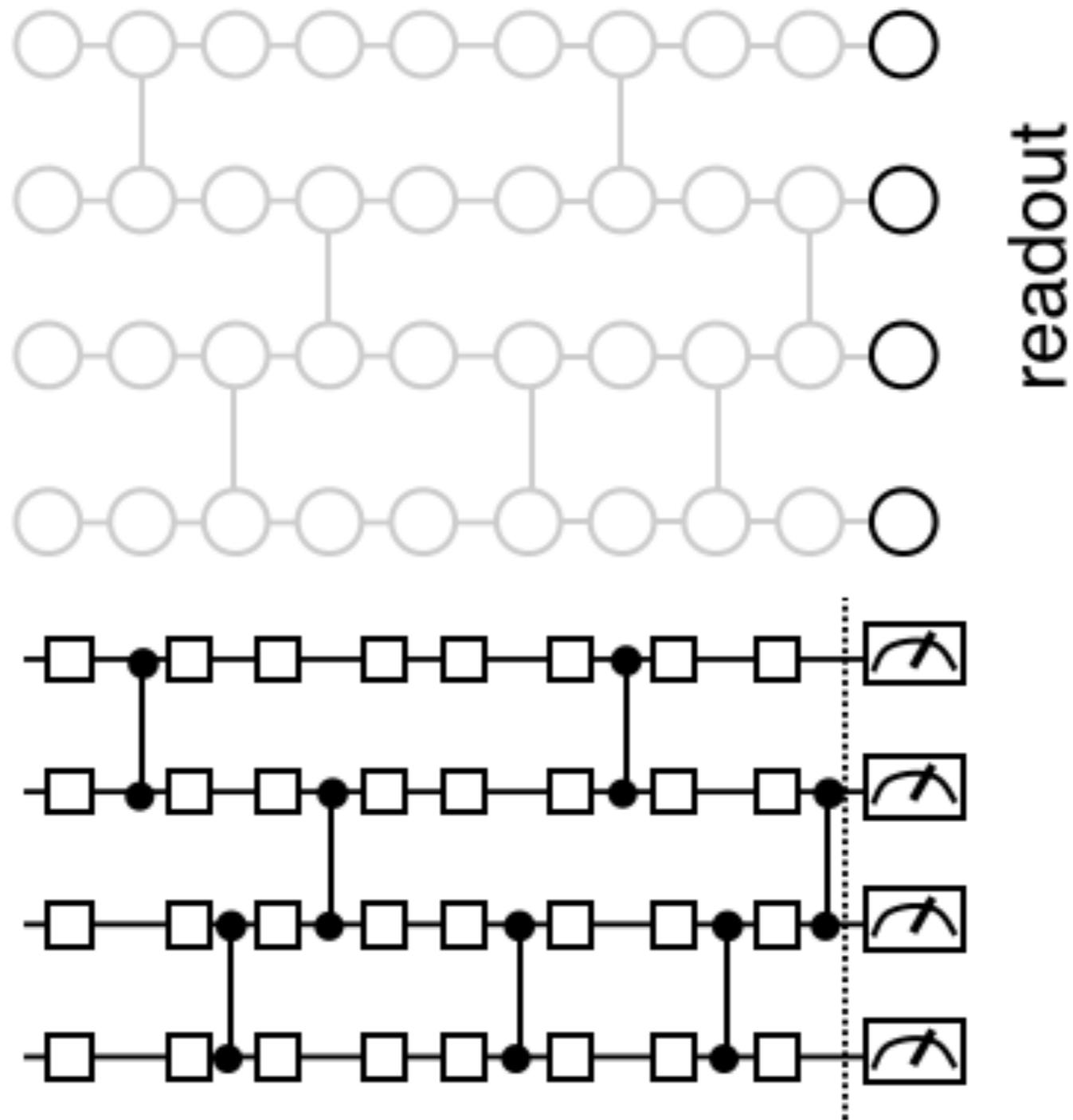
MBQC on 2D cluster state



MBQC on 2D cluster state



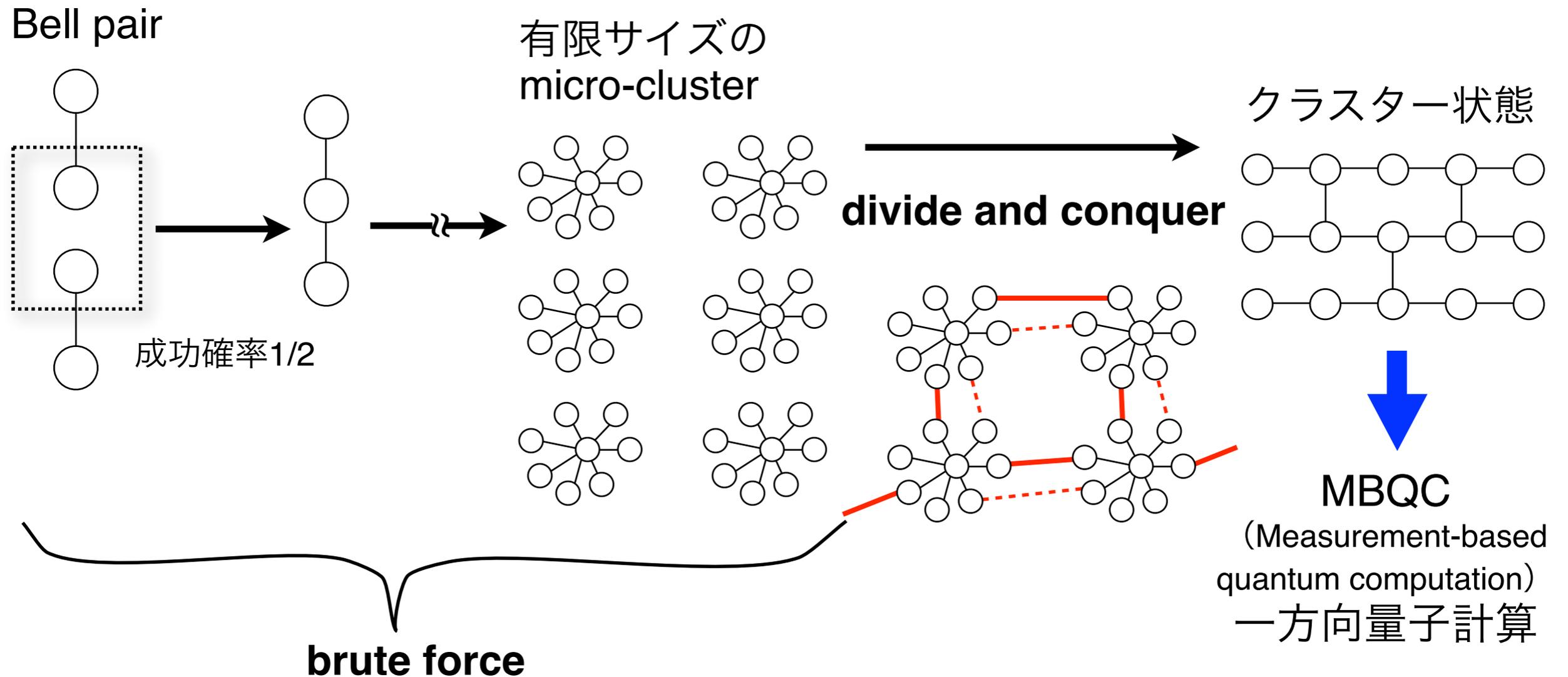
MBQC on 2D cluster state



MBQCの特徴と応用

- ◆ リソース状態と計算のための測定が分離されている。
 - ✓ エンタングルメントなどの性質から、量子計算の能力がわかる。
 - ✓ 状態準備は確率的エンタングルメント生成でよい（線形光学）。
- ◆ 量子多体模型の基底状態(熱平衡状態)をリソースとして利用。
- ◆ トポロジカル量子計算
- ◆ ブラインド量子計算
- ◆ イジング分配関数近似量子アルゴリズム

MBQCの特徴と応用



Nielsen Phys. Rev. Lett. **93**, 040503 (2004) → **micro-cluster**

Yoran-Reznik Phys. Rev. Lett. **91**, 037903 (2003)

Browne-Rudolph Phys. Rev. Lett. **95**, 010501 (2005) → **fusion gate**

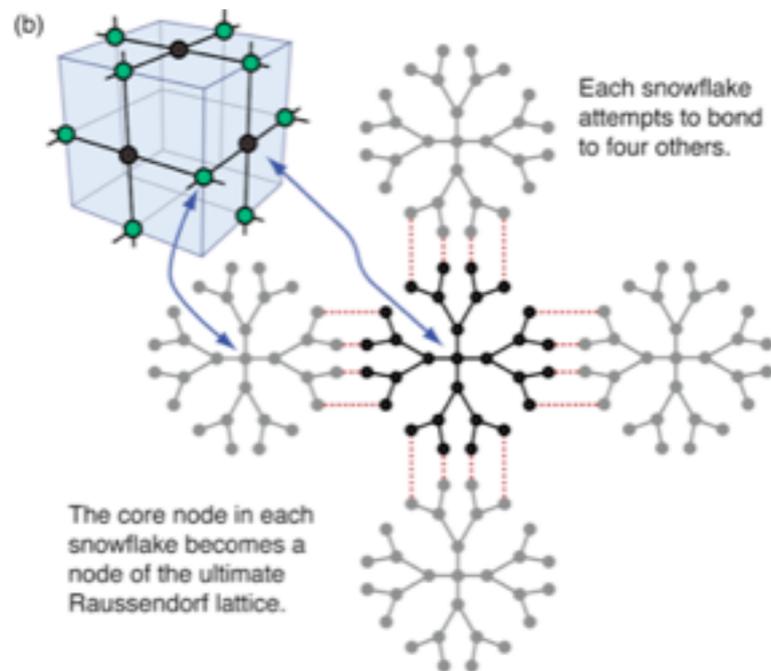
Duan-Raussendorf Phys. Rev. Lett. **95**, 080503 (2005) → **cross-strategy**

K. Kieling, T. Rudolph, and J. Eisert Phys. Rev. Lett. **99**, 130501 (2007) → **percolation**

MBQCの特徴と応用

snowflake

by Matsuzaki-Benjamin-Fitzsimons
Phys. Rev. Lett. **104**, 050501 (2010)

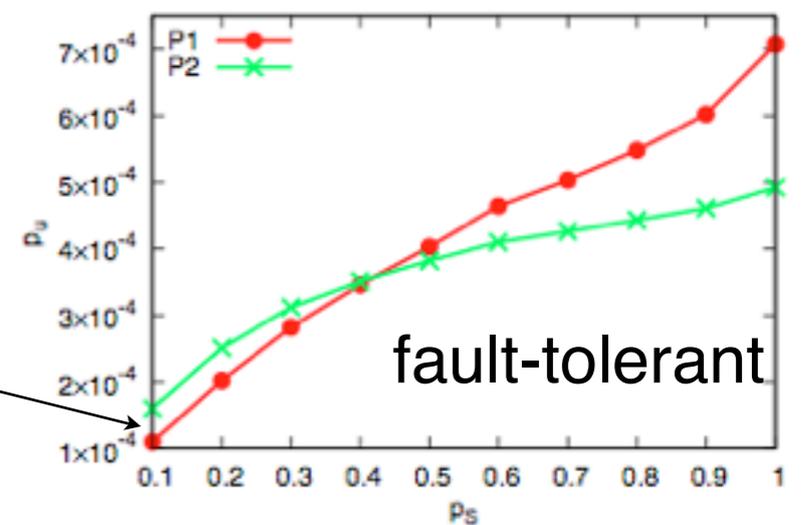
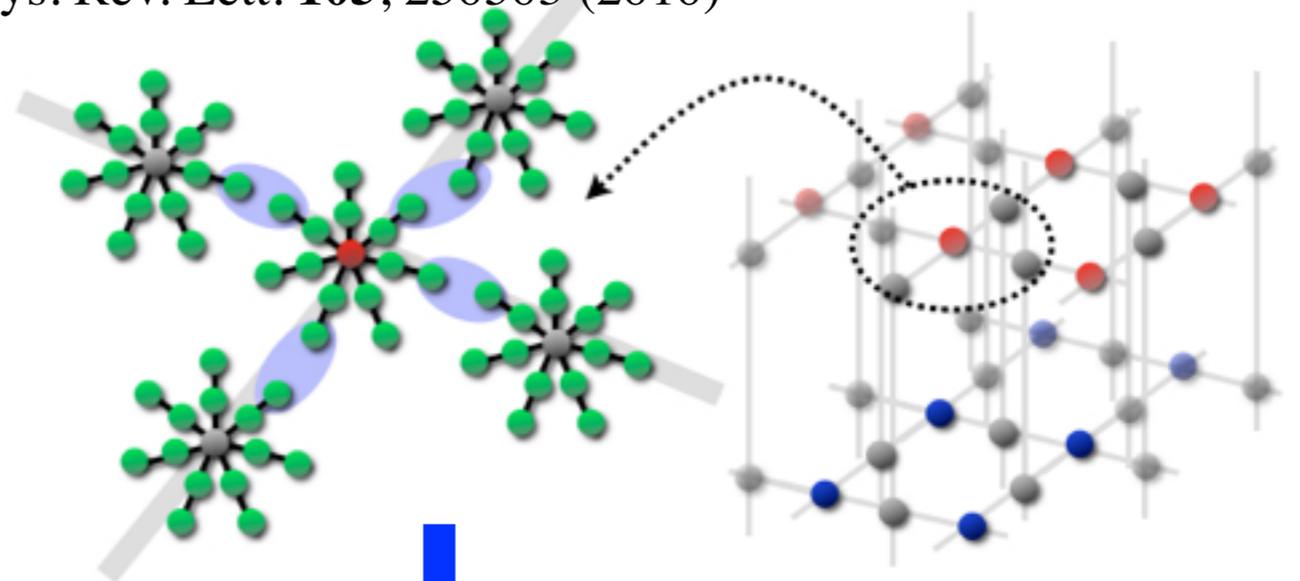


Li *et al.*
Phys. Rev. Lett. **105**, 250502 (2010)

$$p_s = 0.1, p_u = 10^{-4}$$

star-cluster

by KF & Tokunaga
Phys. Rev. Lett. **105**, 250503 (2010)



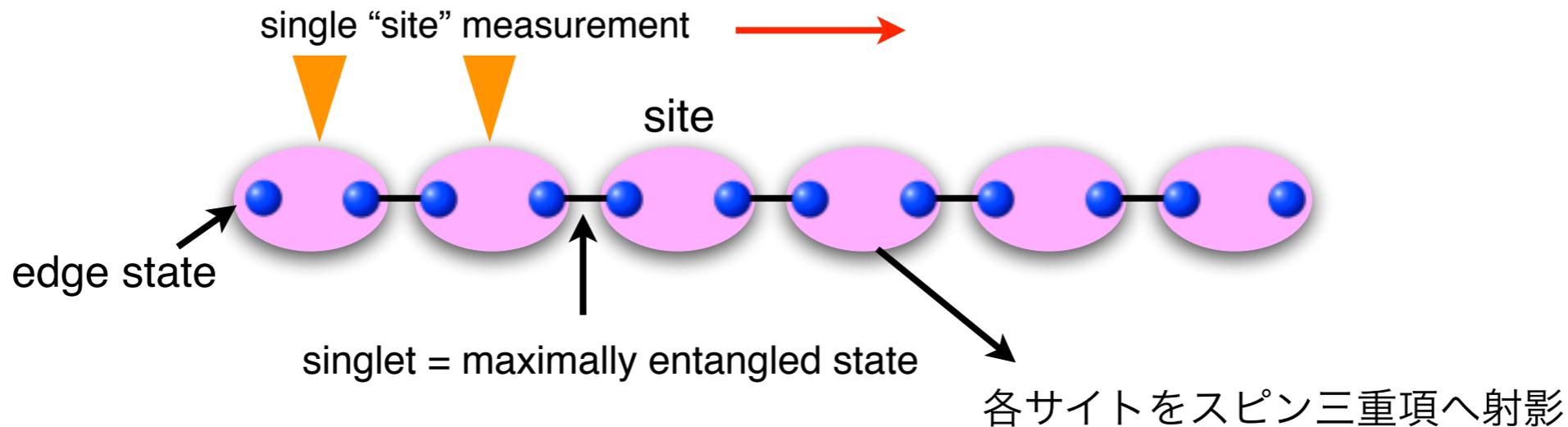
$$p_s = 0.1, p_u = 10^{-4}$$

MBQCの特徴と応用

- ◆ リソース状態と計算のための測定が分離されている。
 - ✓ エンタングルメントなどの性質から、量子計算の能力がわかる。
 - ✓ 状態準備は確率的エンタングルメント生成でよい（線形光学）。
- ◆ 量子多体模型の基底状態(熱平衡状態)をリソースとして利用。
- ◆ トポロジカル量子計算
- ◆ ブラインド量子計算
- ◆ イジング分配関数近似量子アルゴリズム

MBQCの特徴と応用

Valence-bond solid (VBS):



Matrix product state (MPS):

$$|\Psi\rangle = \sum_{i_1, \dots, i_N} \langle R | \underbrace{A[i_N] \cdots A[i_1]}_{\text{correlation space}} | L \rangle | i_1 \cdots i_N \rangle$$

edge state

Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki 状態:

$$H = J \sum_i [\mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+1} - 1/3(\mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+1})^2]$$

Gross-Eisert, PRL (2007)

Brennen-Miyake PRL (2008)

Miyake, Ann. Phys. (2011)

Wei *et al.*, PRL (2011)

Li *et al.*, PRL (2011)

KF-Morimae PRA (2012), KF *et al.*, PRL (2013).

Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki, Comm.

Math. Phys. 115, 477 (1988).

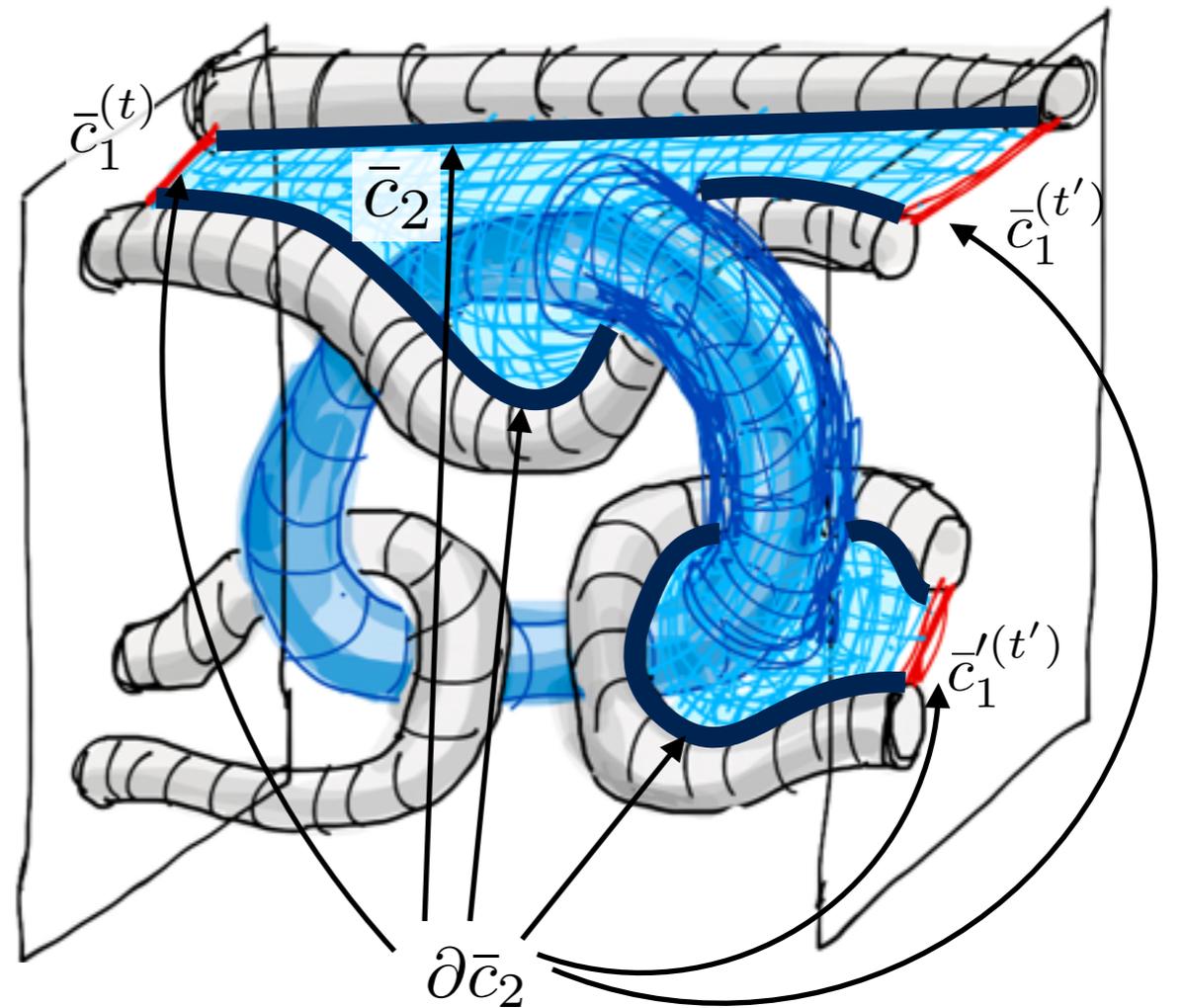
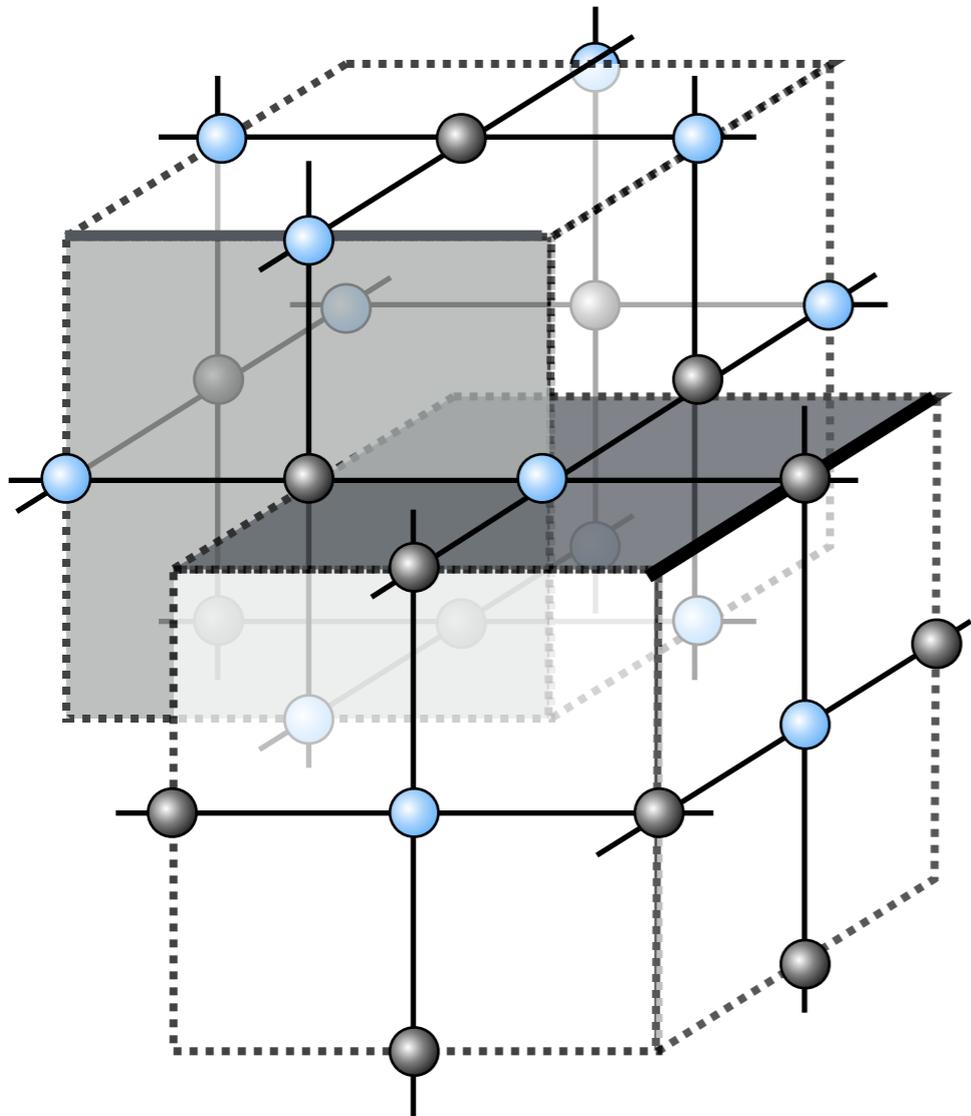
る。

◆ イジング分配関数近似量子アルゴリズム

MBQCの特徴と応用

- ◆ リソース状態と計算のための測定が分離されている。
 - ✓ エンタングルメントなどの性質から、量子計算の能力がわかる。
 - ✓ 状態準備は確率的エンタングルメント生成でよい（線形光学）。
- ◆ 量子多体モデルの基底状態(熱平衡状態)をリソースとして利用。
- ◆ トポロジカル量子計算
- ◆ ブラインド量子計算
- ◆ イジング分配関数近似量子アルゴリズム

MBQCの特徴と応用



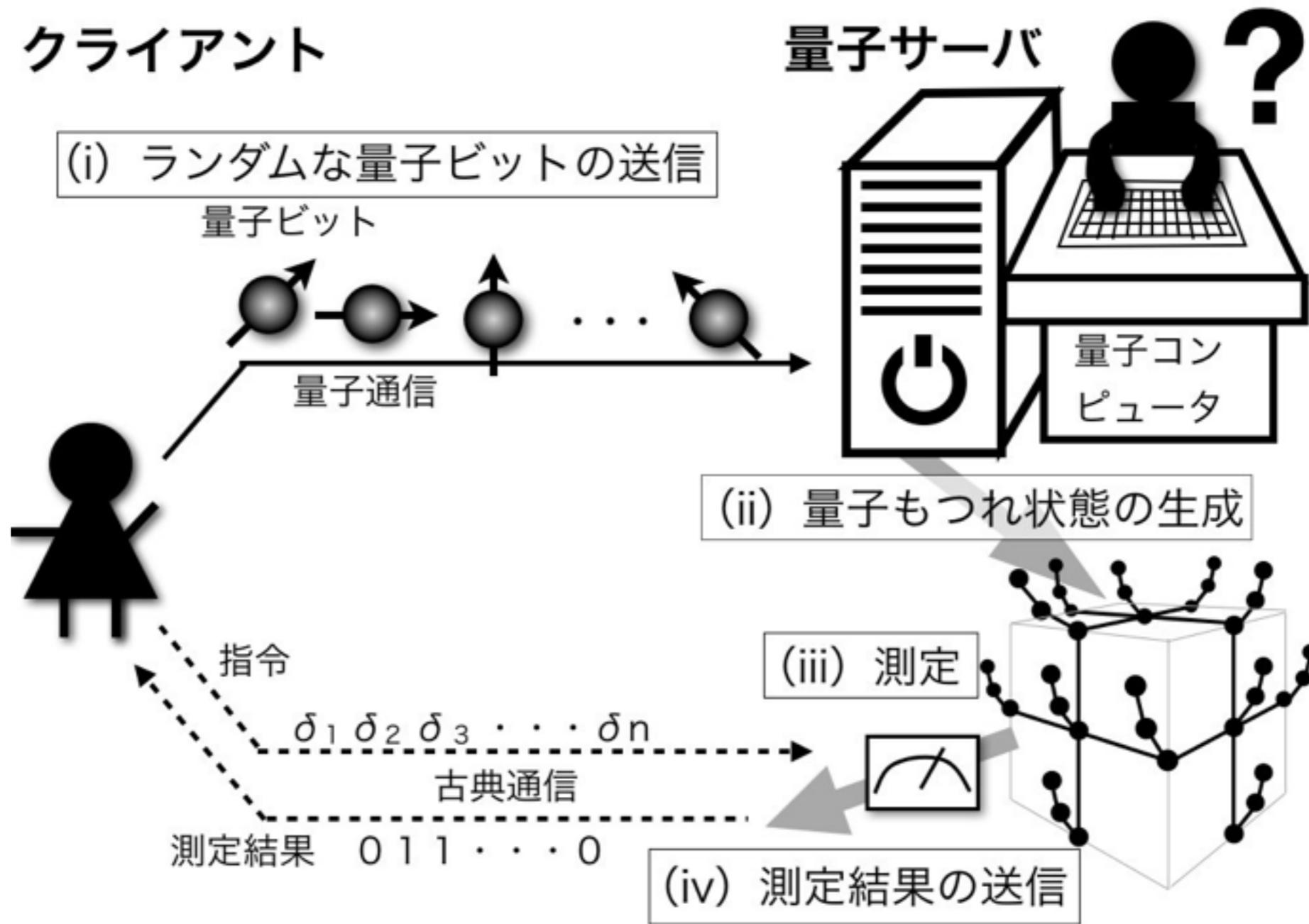
Raussendorf-Harrington-Goyal, *Annals Phys.* **321**, 2242 (2006);
NJP **9**, 199 (2007).

◆ イジング分配関数近似量子アルゴリズム

MBQCの特徴と応用

- ◆ リソース状態と計算のための測定が分離されている。
 - ✓ エンタングルメントなどの性質から、量子計算の能力がわかる。
 - ✓ 状態準備は確率的エンタングルメント生成でよい（線形光学）。
- ◆ 量子多体模型の基底状態(熱平衡状態)をリソースとして利用。
- ◆ トポロジカル量子計算
- ◆ ブラインド量子計算
- ◆ イジング分配関数近似量子アルゴリズム

MBQCの特徴と応用



Broadbent-Fitzsimons-Kashefi, FOCS 2009

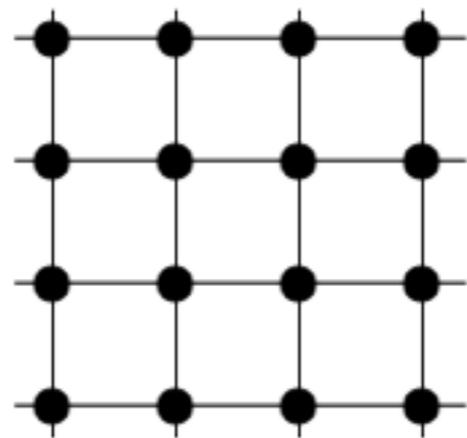
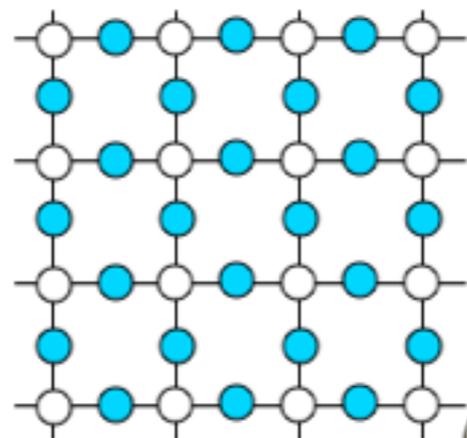
Morimae-Fujii, Nature Comm. 2012; PRL 2013; PRA 2013

MBQCの特徴と応用

- ◆ リソース状態と計算のための測定が分離されている。
 - ✓ エンタングルメントなどの性質から、量子計算の能力がわかる。
 - ✓ 状態準備は確率的エンタングルメント生成でよい（線形光学）。
- ◆ 量子多体モデルの基底状態(熱平衡状態)をリソースとして利用。
- ◆ トポロジカル量子計算
- ◆ ブラインド量子計算
- ◆ イジング分配関数近似量子アルゴリズム

MBQCの特徴と応用

A ○ B ●



Ising模型

$$\left(\bigotimes_{b \in V_b} \langle J_b | H^{\otimes |V_B|} \bigotimes_{a \in V_a} \langle h_a | \right) |\Psi_G\rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}^{|V_A|}} \sum_{\{\sigma_a\}} \bigotimes_{a \in V_a} |s_a\rangle \bigotimes_{b \in V_b} |\bigoplus_{a \in N_b} s_a\rangle$$

$$\langle J_b | \equiv \langle 0 | e^{\beta J_b} + \langle 1 | e^{-\beta J_b}$$

$$\langle h_a | \equiv \langle 0 | e^{\beta h_a} + \langle 1 | e^{-\beta h_a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}^{|V_A|}} \sum_{\{\sigma_a\}} \prod_{a \in V_A} \prod_{b \in V_b} e^{\beta h_a (-1)^{s_a}} e^{\beta J_b (-1)^{\bigoplus_{a \in N_b} s_a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}^{|V_A|}} \sum_{\{\sigma_a\}} e^{-\beta H}$$

$$H = - \sum_a h_a \sigma_a - \sum_b J_b \prod_{a \in N_b} \sigma_a$$

磁場

多体相互作用

MBQCの特徴と応用

- ◆ リソース状態と計算のための測定が分離されている。
 - ✓ エンタングルメントなどの性質から、量子計算の能力がわかる。
 - ✓ 状態準備は確率的エンタングルメント生成でよい（線形光学）。
- ◆ 量子多体モデルの基底状態(熱平衡状態)をリソースとして利用。
- ◆ トポロジカル量子計算
- ◆ ブラインド量子計算
- ◆ イジング分配関数近似量子アルゴリズム