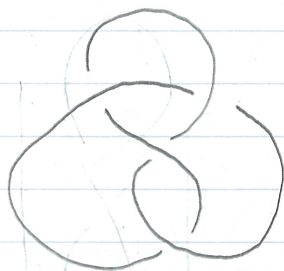


⑥ Jones 多項式近似 アルゴリズム

2-7

✓ 結び目



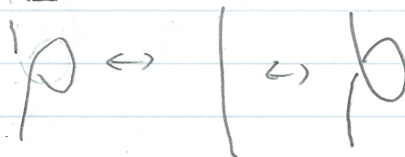
射影図

結び目の変形

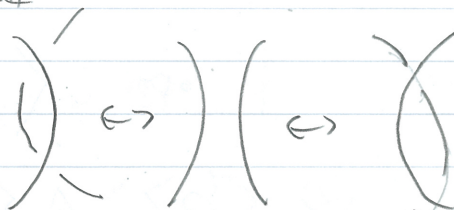
○ 連続変形

○ ライダースター変形

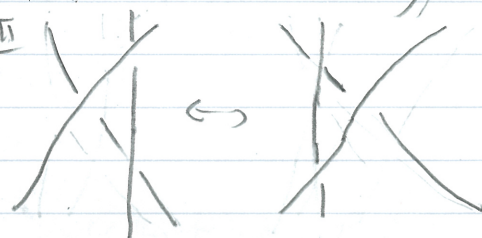
RI



RII



RIII



これらの変形で等しい結び目は?
→ 不変量

✓ Jones 多項式

(向き付け)

結び目 L の Jones 多項式

$$V_L(t) = (-A)^{3w(L)}$$

$3w(L)$

$\langle L \rangle$

Kauffman 多項式

○ ねじり数 $w(L) = (\nearrow \text{の数}) - (\searrow \text{の数})$

$$t = A^{-4}$$

○ Kauffman 多項式 $\times \in \{ \cup, \cap \}$ に置きかえる。

ある置きかえた状態 S に対して値

$$S(L) = A^{s_+ - s_-} d^{|S| - 1}$$

s_+ は $\cup$ の数

s_- は $\cap$ の数

$|S|$ は閉ループの数, $d = -(A^3 + A^{-2})$

$$\langle L \rangle = \sum_S S(L)$$

すべての向き = 2 (2重向き)

✓ 不変性

$$\langle \diagup \rangle = A \langle 11 \rangle + A^{-1} \langle \diagdown \rangle$$

$$\langle L \cup O \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle K \rangle$$

Σ使うと

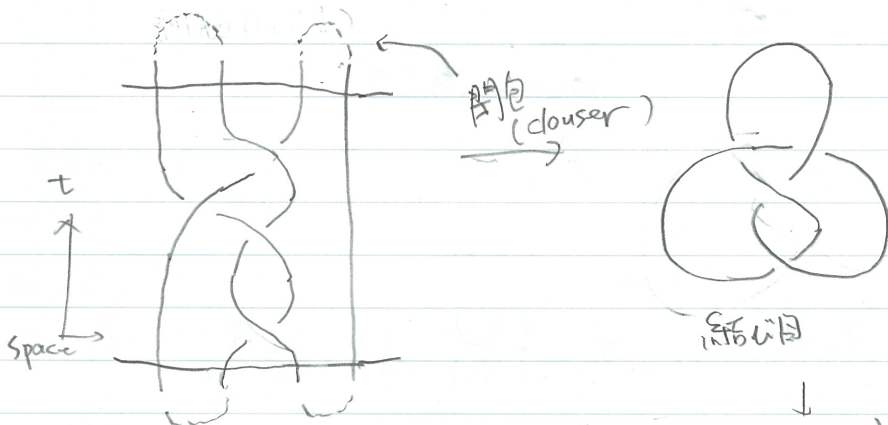
• RI $\langle \bigcirc \rangle = (-A^3) \langle 1 \rangle$
→ Jones多項式は $(-A)$ で修正

• RII $\langle \bigcirc \rangle = \langle 1 \rangle = \langle \bigcirc \rangle$

• RIII $\langle \diagup \rangle = \langle \diagup \rangle$

② $\langle \bigcirc \rangle = A \langle 10 \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \rangle$
 $= A(-A^2 - A^{-2}) \langle 1 \rangle + A^{-1} \langle 1 \rangle$
 $= -A^3 \langle 1 \rangle$

✓ 紐紐と Jones多項式と量子計算



紐紐 (braid)

Jones多項式

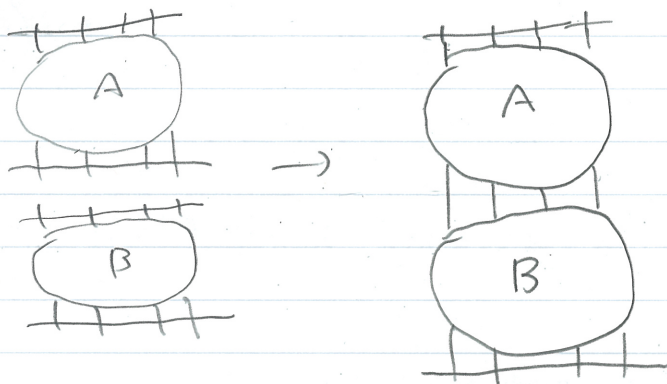
2次元平面上での粒子の動き、
 紐紐群の2次元表現 → 時間発展

↓
 物理量の規正

規格化

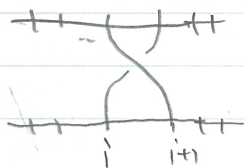
- Witten '89
- Freedman-Kirby
- Larsen-Wang
- 量子回路の表現
- Aaronson-Jones-Landau

✓ 糸組群, B_n (n 本の紐)



群になる.

B_n の生成元 $\{1, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$



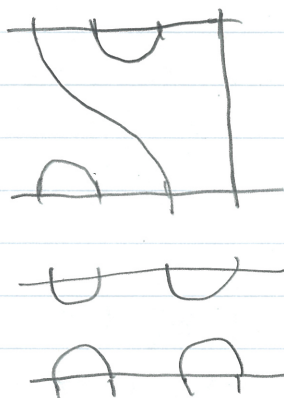
$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i-j| \geq 2$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

σ_i の逆は σ_i 自身で表せる.

✓ Temperley-Lieb 代数 (TL)

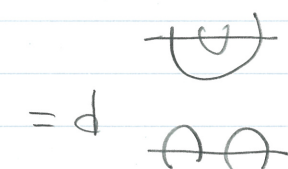
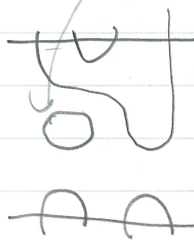
tangle



crossing は X.

cup + cap OK.

閉ループは d のスコアで表れる.

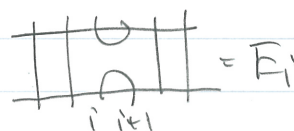


$\{1, E_1, \dots, E_{n-1}\}$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i-j| \geq 2$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

$$\sigma_i^2 = d \sigma_i$$



✓ $B_n \in TL_n(d)$ の場合 $= J$.

$G_i \rightarrow AE_i + A^{-1} \mathbb{1}$ (対応させる (B_n の代わりは後
で満す))

$$\left[\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right] \rightarrow A \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) + A^{-1} (\mathbb{1} \mathbb{1})$$

$TL_n(d)$ の表現で作れば, B_n の表現が得られる.

(B_n)

✓ $TL_n(d)$ の表現 $\rightarrow$ path-model 表現.

◦ グラフ G_R を考える ($k-1$ 頂点 $k-2$ 辺)



◦ グラフ上の1から出発するヒステリシスワーク
を基底としてヒルベルト空間 $H_{n,k}$ を作る.

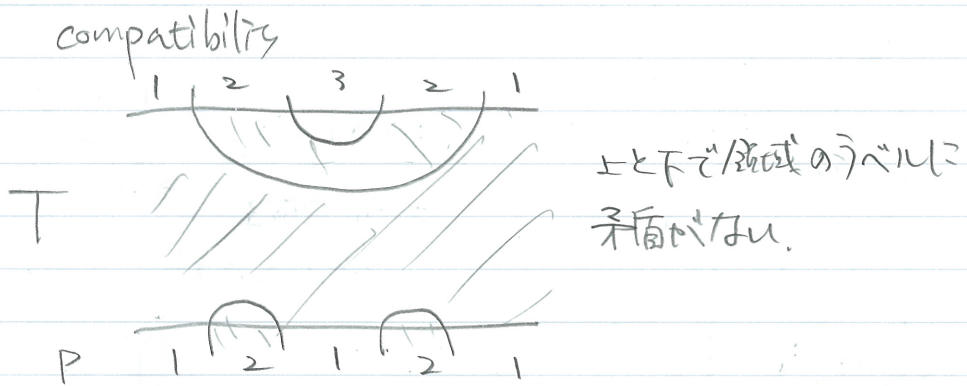
$$\begin{array}{ll} \text{(例)} & p = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \quad |p\rangle \rightarrow H_{n,k} \\ & p' = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \quad |p'\rangle \end{array}$$

◦ tangle 図 T に対して $H_{n,k}$ 上の表現を

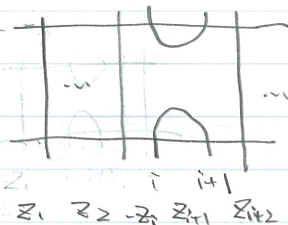
$\rho(T)$ とする. (パス内の遷移要素

$|p\rangle \leftrightarrow |p'\rangle$
を定める)

- $|P \times P|$ 成分が非ゼロなのは P と P' が compatible のときだけ



- $\Phi_i = \rho(e_i)$



1/2 $P = z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots$ のうち $i, i+1, i+2$ ステップの増減に基き

$$|\chi\rangle, |\chi\rangle, |\chi\rangle, |\chi\rangle$$

と書くと.

$$\Phi_i |\chi\rangle = 0$$

$$\Phi_i |\chi\rangle = \frac{\lambda_{z_i-1}}{\lambda_{z_i}} |\chi\rangle + \frac{\sqrt{\lambda_{z_i+1} \lambda_{z_i-1}}}{\lambda_{z_i}} |\chi\rangle$$

$$\Phi_i |\chi\rangle = \frac{\lambda_{z_i+1}}{\lambda_{z_i}} |\chi\rangle + \frac{\sqrt{\lambda_{z_i+1} \lambda_{z_i-1}}}{\lambda_{z_i}} |\chi\rangle$$

$$\Phi_i |\chi\rangle = 0$$

$$\lambda_j = \sin(\pi j/k), \quad A = ie^{-i\theta/2}, \quad d = 2 \cos \theta$$

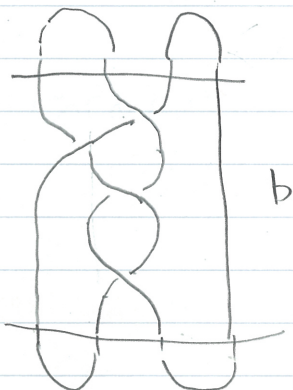
のとき

$$\rho(G_i) = \rho(AE_i + A'I) = A\Phi_i + A'I$$

は 2 = マリ-表現になる.

✓ Jones 多項式との関係

$$\alpha = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \quad \text{シグザグパズ}$$



$$\langle \alpha | \rho(b) | \alpha \rangle = \frac{1}{\Delta} V_{b^{pl}} (A^{-4})$$

ユークリッド空間

$\rho(G_i)$ の積

$$\Delta = d^{n/2-1} (-A)^{3w(b^{pl})}$$

b^{pl} は plat clouser

パズル $|P\rangle$ を増減 $\{A, B\}$ に基づいて $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ と書くと
量子アルゴリズム

$$|\alpha\rangle = |0101\dots\rangle$$

$$\rho(G_i) \text{ は } \left\{ \begin{array}{l} | \dots 00 \dots \rangle \\ | \dots 01 \dots \rangle \\ | \dots 10 \dots \rangle \\ | \dots 11 \dots \rangle \end{array} \right\} \text{ に同様に}$$

$$\text{作用するので } I \otimes I \otimes \dots \cup_i \otimes I \dots I$$

↑

2sub-ユークリッド空間

の形にカチン。 → Hadamard test 2"

$\langle \alpha | \rho(b) | \alpha \rangle$ を得る。

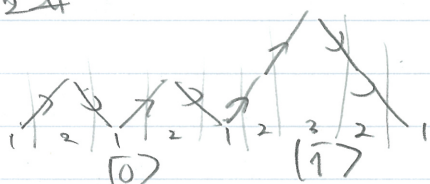
✓ BQP 困難性.

4ステップ インコーディング

$$|0\rangle = |1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1\rangle = |\nearrow \nwarrow \nearrow \nwarrow \nearrow\rangle$$

$$|1\rangle = |1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1\rangle = |\nearrow \nwarrow \nearrow \nwarrow \nearrow\rangle$$

2 qubit 計算



8本の紐

B_gの表現

1. 同型性より KS アルゴリズムを用いて

$\{|100>, |101>, |110>, |111>\}$
 に与える任意のエンタングルメントを近似できる。
 ($k \geq 4, k \neq 6$)

$\rightarrow V_{B^k}(A^k)$ の近似 = BQP 困難
 (ユニバーサル量子計算の
 出力を近似できる)