

§3 スタビライザ形式 (by D. Gottesman)

3-1

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1 \dots i_n} C_{i_1 \dots i_n} |i_1 i_2 \dots i_n\rangle$$

qubit 2n にわたる 2^n 個の基底。

→ 効率的に基底からの量を表現したい
→ スタビライザ形式

✓ n qubit Pauli 群

$$P_n = \{I, \pm i\} \times \{I, X, Y, Z\}^{\otimes n}$$

(例) 2qubit Pauli 群

$$P_2 = \{I, \pm i\} \times \{II, IX, IY, IZ, XI, XY, \dots, ZZ\}$$

($\otimes$ は省略している)

✓ スタビライザ群 $\mathcal{S}$

→ I を除く Pauli 群の可換部分群。

$$\mathcal{S} \subset P_n - I \notin \mathcal{S}, \quad \forall S_i, S_j \in \mathcal{S} \quad [S_i, S_j] = 0$$

(例) $\{II, XX, ZZ, -YY\}$

→ X と Z がそれぞれ重なり合っていると交換。

✓ 生成元による表示

$$\mathcal{S} = \langle \{S_i\} \rangle$$

生成元

$\{S_i\}$ の元の積で $\mathcal{S}$ の任意の元を作れる

(例) $\langle \{XX, ZZ\} \rangle$

→ n qubit スタビライザ群の生成元は高々 n 個。

✓ スタビライザ状態

スタビライザ群の元の+1の固有状態

任意の $S \in \mathcal{S}$ に対し $S|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$ である $|\Psi\rangle$.

→ 生成元の固有状態であれば+1.

(例) $\langle \{XX, ZZ\} \rangle$ のスタビライザ状態は

$$(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2} \quad (\text{Bell状態})$$

$$XX (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2} = (|11\rangle + |00\rangle)/\sqrt{2}$$

$$ZZ (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2} = (|00\rangle + (-1)^2 |11\rangle)/\sqrt{2}$$

(例2) $\langle \{XXX, ZZI, IZZ\} \rangle$

$$\frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\text{GHZ状態})$$

○ $A_i = I \otimes \dots \otimes A \otimes \dots \otimes I$ と書くことにする.

添字

(例) $XXX \rightarrow X_1 X_2 X_3 \quad ZZI \rightarrow Z_1 Z_2 \quad IZZ \rightarrow Z_2 Z_3$

✓ スタビライザ空間

生成元 S_i

独立な生成元の個数 $n-k$ とすると、

基底に格納できる

スタビライザ状態は、 2^k 次元の部分空間を張る.

(例) $\langle \{ZZI\} \rangle \rightarrow \{ |00\rangle, |11\rangle \}$

2次元の部分空間

$$\propto |00\rangle + 3|11\rangle$$

生成元は72.
2次元空間

	ZZ	
X		
+	$\frac{ 00\rangle + 11\rangle}{\sqrt{2}}$	$\frac{ 01\rangle + 10\rangle}{\sqrt{2}}$
-	$\frac{ 00\rangle - 11\rangle}{\sqrt{2}}$	$\frac{ 01\rangle - 10\rangle}{\sqrt{2}}$

(例2) $\langle \{Z_1, Z_2, Z_3\} \rangle \quad \{ |000\rangle, |111\rangle \}$
 2次元空間

✓ ステディ状態形式の利点

○ 特定のクオビットの量子計算を効率よく計算できる

(Gottesman-Knillの定理)

○ 量子回路の記述が容易である

→ トポロジカル秩序を記述するモデルに適用

○ 測定型量子計算のリリース

→ 演算ではなく、状態とそれに対する射影で計算するモデル

✓ Clifford 回路

Clifford 演算: Pauli 積を Pauli 積に 共役作用 で写すこと

(例) Hadamard

$$HXH = Z$$

$$HZH = X$$

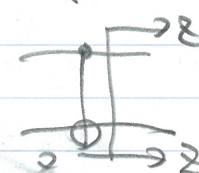
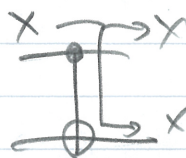
phase gate

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$SX S^\dagger = Y$$

$$SY S^\dagger = -X$$

CNOT



$$A_{1,2}(X) \otimes I_2 A_{1,2}(X)$$

$$= X \otimes X_{22}$$

$$A_{1,2}(X) \otimes I_2 A_{1,2}(X)$$

$$= Z \otimes I_2$$

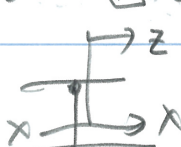
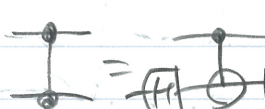
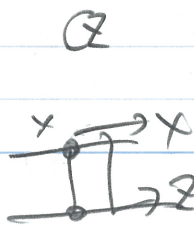
$$A_{1,2}(X) \otimes I_2 A_{1,2}(X)$$

$$= Z \otimes Z_2$$

$$A_{1,2}(X) \otimes I_2 A_{1,2}(X)$$

$$= I \otimes X_2$$

Q



FY, target qubit Q

XとZと交換する

✓ Clifford 演算の作用.

$|\Psi\rangle \in \langle S_i \rangle$ の stabilizer 状態.

$U \in \text{Clifford 演算}$ とする.

状態表示

$$S_i |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \longleftrightarrow$$

stabilizer 状態

$$\langle S_i \rangle$$

同時作用

$$|\Psi\rangle = U |\Psi\rangle$$

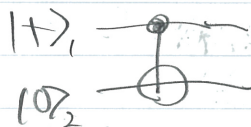
$$S_i' = U S_i U^\dagger$$

$$S_i' |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \longleftrightarrow$$

$$\langle S_i' \rangle$$

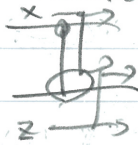
U の作用は $S_i \rightarrow S_i'$ である.

(例) $|+\rangle_1 |0\rangle_2 \langle \{X_1, Z_2\} \rangle$

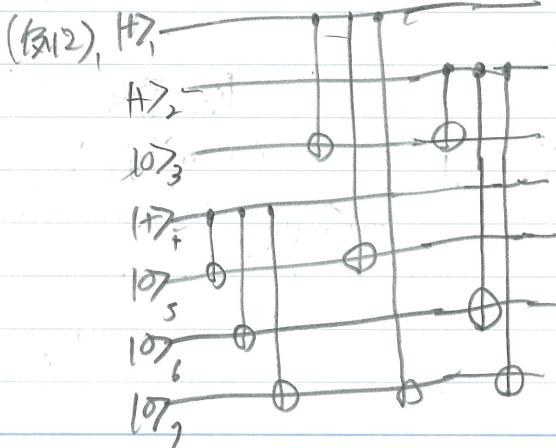


$$(|00\rangle + |11\rangle) / \sqrt{2} \leftarrow \text{状態表示で計算可能}$$

$\langle \{X_1, Z_2\} \rangle \rightarrow \langle \{X_1 X_2, Z_1 Z_2\} \rangle \leftarrow \text{stabilizer 状態の基底}$



$\leftarrow \text{基底状態の stabilizer}$



$$X_1 \rightarrow X_1 X_3 X_5 X_7 = S_1$$

$$X_2 \rightarrow X_2 X_3 X_6 X_7 = S_2$$

$$X_4 \rightarrow X_4 X_5 X_6 X_7 = S_3$$

$$Z_3 \rightarrow Z_1 Z_2 Z_3$$

$$Z_5 \rightarrow Z_1 Z_4 Z_5$$

$$Z_6 \rightarrow Z_2 Z_4 Z_6$$

$$Z_7 \rightarrow Z_1 Z_2 Z_4 Z_7$$

4つのビットが1777°

$$|\Psi\rangle \propto \left(\frac{I+S_z}{2} \right) \left(\frac{I+S_z}{2} \right) \left(\frac{I+S_z}{2} \right) |00\dots 0\rangle$$

↑
固有値+1
の空間への射影演算子→ z-typeのスピンの状態を
自動的に満たす

✓ スピン状態の Pauli 基底での測定

 $A \in X_1, X_2$ の固有状態への射影測度を考える(場合1) $\{S_i\}$ と A_i が交換→ A_i or $-A_i$ のスピンの状態に属する

測定結果は +1 or -1

測定後のスピンは不変

(場合2) $\{S_i\}$ と A_i が反交換

→ 測定結果は 1/2 の確率で +1 or -1

• S_i が A_i と反交換に成るように交換して取り除く → $\{S_i\}$ • S_i が交換に成るよう取り除く、 $(\pm 1)A_i$
を足す $\langle (\pm 1)A_i, \{S_2 \dots S_n\} \rangle$ (例) $\langle \{X_1, X_2, Z_3\} \rangle$ (Bell 状態)① 1つの observable $\in X$ で測定 → 1/2 の確率で ± 1 測定後 $\langle \{X_1, X_2, (\pm 1)X_1\} \rangle$ ② 2つの observable $\in X$ で測定 → 確率 1/2 で +1 or -1得られる $\langle \{+X_1, +X_2\} \rangle$ or
 $\langle \{-X_1, -X_2\} \rangle$

✓ Gottesman-Knill の定理、

Input: Pauli の基底状態

gate: Clifford 演算

Out: Pauli 基底の測定

→ 古典計算機で効率的にシミュレートできる

○ Pauli 基底を $2n+1$ ビット b で表示

$$\beta = (-1)^{b_0} \prod_{i=1}^{n+1} X^{(b_i)} \prod_{j=n+1}^{2n+1} Z^{(b_j)}$$

(例) $(-1)X_1 X_2 Z_2 Z_4 \rightarrow 1110010101$

$(2n+1) \times n$ ビットで基底状態を

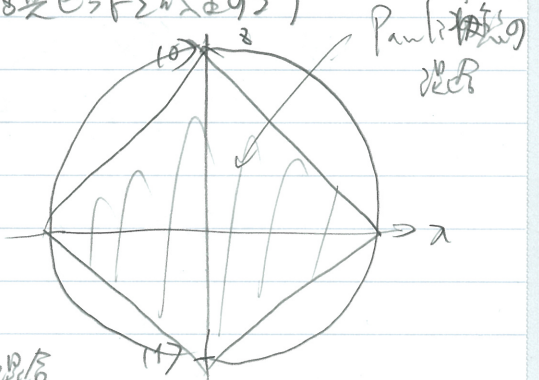
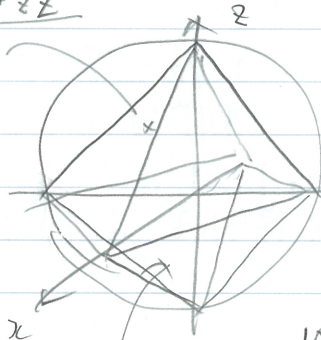
記述 → Clifford 演算は古典ビットの演算

量子計算には、nonClifford が必要

$$e^{-\frac{\pi}{8}iZ} \times e^{\frac{\pi}{8}iZ} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$$

✓ Input を Pauli 基底状態の確率混合にしても古典シミュレート可能 (解析的に初期の古典ビットを生成)

$$\rho = \frac{I + xX + yY + zZ}{2}$$

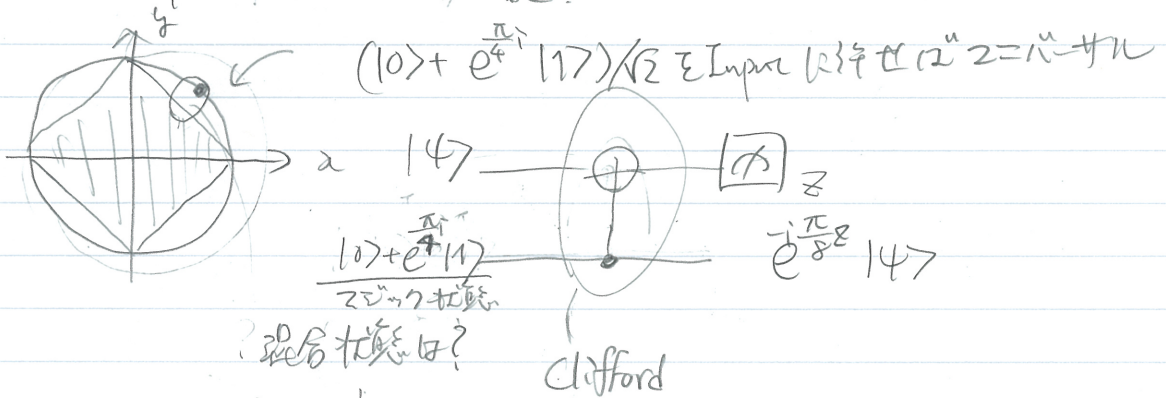


$|0\rangle$ と $|1\rangle$ の混合

$$\rho = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|$$

$$= \frac{I + pZ + (1-p)X}{2}$$

Bloch球内の四面体内部の状態を Input
 としても与えられる可能性がある。



→ マジック状態蒸留 (magic state distillation = MSD)

$| \psi \rangle = | \phi \rangle$