

① 量子誤り訂正 (quantum error correction)

誤り訂正

$$0 \rightarrow 000, 1 \rightarrow 111$$

コピーに冗長性をもたせる。(量子情報のコピー定理)

量子ビット反転符号

$$|0_L\rangle \rightarrow |000\rangle, |1_L\rangle \rightarrow |111\rangle \text{ (基底を符号化)}$$

$$|4_L\rangle = \alpha |0_L\rangle + \beta |1_L\rangle$$

o 1つの Pauli X エラー訂正

o 重みあわせで壊さないようなエラーを識別

→ $Z_1 Z_2, Z_1 Z_3$ の測定

→ 符号は $\langle Z_1 Z_2, Z_1 Z_3 \rangle$ でスケライズ

エラーは固有値を $+1 \rightarrow -1$

スケライズの測定でエラーを識別

$Z_1 Z_2$	$+1$	-1	
$Z_2 Z_3$	$ 000\rangle$ $ 111\rangle$	$ 100\rangle$ $ 011\rangle$	エラーと反交換 が成る元の固有 値が反転
$+1$	$ 000\rangle$ $ 111\rangle$	$ 100\rangle$ $ 011\rangle$	
$Z_2 Z_3$	$+1$	-1	
-1	$ 001\rangle$ $ 110\rangle$	$ 101\rangle$ $ 010\rangle$	

✓ Shorの9量子ビット符号.

→ 量子ビット12位相情報を持つ.

101と111を
↑ 区別すると...

$$\rightarrow \alpha|+++> + \beta|--->$$

位相反転Zの訂正.

$$|0_L> = \frac{(|000> + |111>)(|000> + |111>)(|000> + |111>)}{\sqrt{2}}$$

$$|1_L> = \frac{(|000> - |111>)(|000> - |111>)(|000> - |111>)}{\sqrt{2}}$$

スタビライザ

1				X X X	X X X
2	X X X			X X X	
3	Z Z				
4	Z Z				
5			Z Z		
6			Z Z		
7				Z Z	
8				Z Z	

1つのX, Zエラーを訂正
(反交換する)

(1 qubitの任意の演算子は
I, X, Y, Zで展開できる)

✓ スタビライザ符号.

スタビライザ $\{S_i\}$ の固有空間に符号化.

$\{S_i\}$ と反交換するエラーを検出.

→ $\{S_i\}$ の決定でエラーを識別 = シンボリック性 (回路を書く)

✓ 論理演算子 (logical operator)

$\{S_i\}$ と交換し、かつ独立な演算子

→ 符号空間内で作用.

(例) $\langle \{Z_1 Z_2, Z_2 Z_3\} \rangle \rightarrow L_x = X_1 X_2 X_3 \quad L_z = Z_1$

(or Z_2, Z_3)

L_x と L_z は反交換なので論理 Pauli 演算子として作用する.

L_z の固有状態 $\rightarrow |000>$

$L_x |000> = |111>$

✓ 符号距離 (code distance)

— Pauli 積の重み (weight) $wt(B) \equiv$ Pauli 演算子の作用
が X または Y のIX

(例) $wt(IIXXII) = 2$

— 符号距離 d

$$d = \min_L wt(L)$$

↑
logical operator

(例) Shor code の logical operator は,

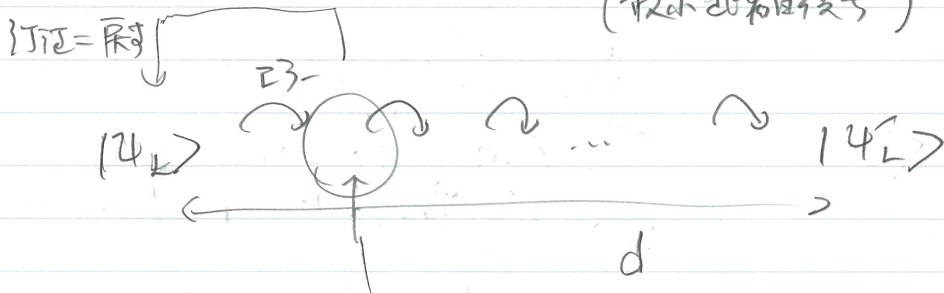
$$L_x = XXX III III$$

$$L_z = ZII ZII ZII$$

$$d = 3$$

— $t = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ 個のエラーは訂正できる.

(最小距離符号)



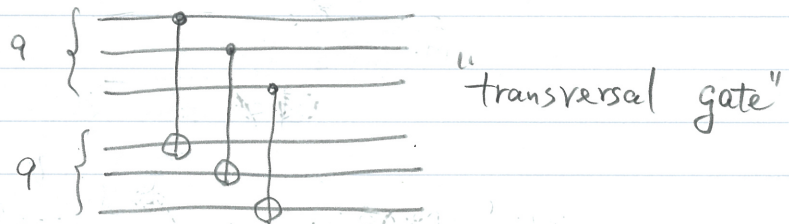
≡ 量子状態を得たときエラー

より多くのエラーがあると失敗する.

✓ 符号空間上での演算

9 qubit code のスタビライザは X と Z で分離 (CSS 符号)

→ 各 qubit 内の CNOT (スタビライザ空間内で作用する)



② 2つの 9 qubit code のスタビライザは

$$\mathcal{S}_9 = \langle \{ S_x^{(1)} \otimes I, S_z^{(1)} \otimes I, I \otimes S_x^{(1)}, I \otimes S_z^{(1)} \} \rangle$$

Transversal CNOT

$$\langle \{ S_x^{(1)} \otimes S_x^{(1)}, S_z^{(1)} \otimes I, I \otimes S_x^{(1)}, S_z^{(1)} \otimes S_z^{(1)} \} \rangle$$

符号空間上での作用は logical operator $\in \mathcal{L}$.

$$L_x \otimes I \rightarrow L_x \otimes L_x$$

$$I \otimes L_z \rightarrow L_z \otimes L_z$$

CNOT 演算と同じ!!

→ 符号状態の CNOT を作用させ!!

Hadamard は?

✓ 7 qubit Steane code.

$$\left. \begin{aligned} S_x^{(1)} &= X I X I X I X \\ S_x^{(2)} &= I X X I I X X \\ S_x^{(3)} &= I I I X X X X \\ S_z^{(1)} &= Z I Z I Z I Z \\ S_z^{(2)} &= I Z Z I I Z Z \\ S_z^{(3)} &= I I Z Z Z Z Z \end{aligned} \right\}$$

X と Z の分離.

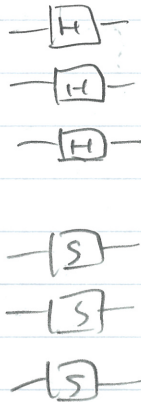
X と Z の端所成同位.

• logical operator: $L_x = X^{\otimes 7}$, $L_z = Z^{\otimes 7}$

• code distance: 3. $\rightarrow$ 17 qubit - 15 qubit

• CNOT is transversal

• H & S is transversal.



$$\langle S_x^{(1)}, S_z^{(1)} \rangle \xrightarrow{H} \langle S_z^{(1)}, S_x^{(1)} \rangle$$

$$\text{logical op. is } L_x \xrightarrow{H} L_z, L_z \xrightarrow{H} L_x$$

logical な H 演算に力、2, 3, 11

$$\text{同様にして } L_x \xrightarrow{S} (i X Z)^{\otimes 7}$$

$$= (i)^7 X^{\otimes 7} Z^{\otimes 7}$$

$$= -i L_x L_z$$

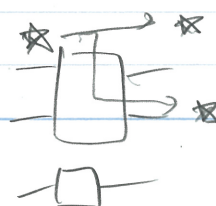
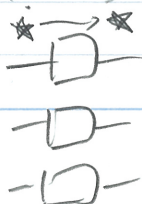
$$= -L_y = -i L_x L_z$$

logical な ZS に力、2, 3, 11

↑ $\rightarrow$ L_y のように

7 qubit code は任意の Clifford 演算を transversal に実行できる

に実行できる

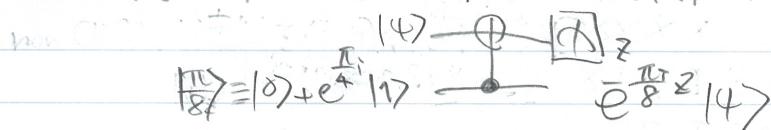


transversal な操作はエラーを増幅しない

$\rightarrow$ 7-qubit code (fault-tolerance)

② ズジック状態蒸留 (Kwill流)

ズジック状態 $|0\rangle + e^{\frac{\pi i}{4}} |1\rangle \rightarrow \text{non Clifford 演算}$

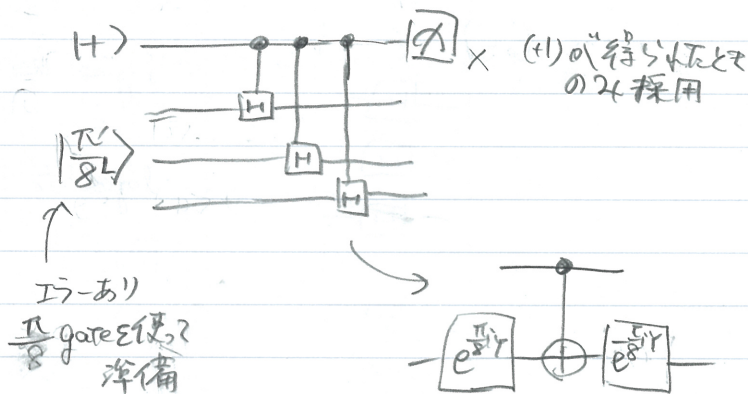


ズジック状態上のエラーは? $\rightarrow$ MSD

$$\frac{(x+z)}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\pi}{8} z} |4\rangle = e^{-\frac{i\pi}{8} z} |4\rangle \equiv |\frac{\pi}{8}\rangle \text{ について考える.}$$

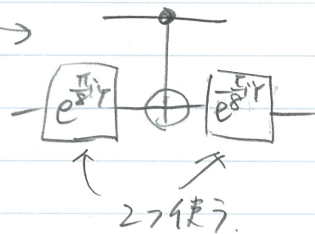
$$|\frac{\pi}{8}\rangle \text{ は } e^{\frac{-\pi i}{8} x} \times e^{\frac{\pi i}{8} z} = (x+z)/\sqrt{2} = t/1 \text{ の固有状態.}$$

$H_L = H^{\otimes 7}$ (transversality) なので、 $H^{\otimes 7}$ の測定をやればいい

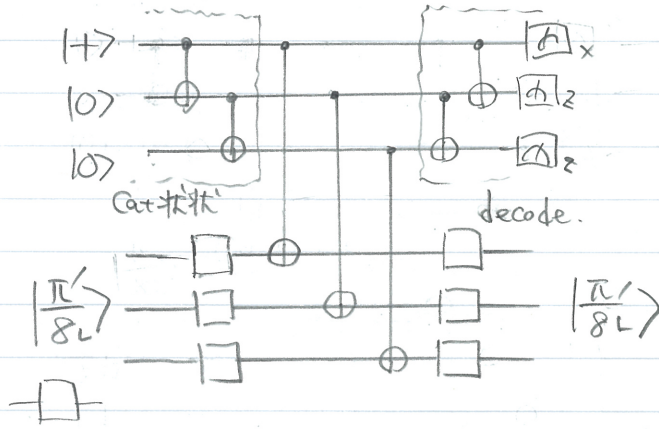


$$1 + 2 \times 7 = 15 \text{ の}$$

$$\frac{\pi}{8} \text{ gate を使った } 1 \text{ つの } |\frac{\pi}{8}\rangle \text{ を shift.}$$



✓ Cat状態を用いたFT測定 (DiVincenzo-Shor)



任意の1つのエラーは、検出される。

→ $|\frac{\pi'}{8L}\rangle$ のエラー確率は P^2

(51図の noisy な $|\frac{\pi}{8}\rangle$ を用いて

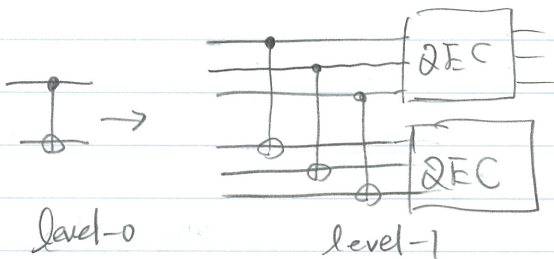
1つの clean な $|\frac{\pi}{8}\rangle$ を作成。

15 qubit Reed-Muller 符号を用

いた Bravyi-Kitaev 法と等価である。

→ 2-qubit 量子計算回路に分解して行う。

✓ 繰り返し定理



physical 雑音をすべて level-1 雑音に置き換える。

level-l

エラー確率 P → CP^2 (1回の回文) → $(C(CP^2))^2$ → $P_E = \frac{(CP)^{2^l}}{C}$

$P < \frac{1}{C}$ ならば $P_E \rightarrow 0$

1/2-2 は $P_E = NM^2$

$P_E \sim 1/N$ にした。 $\frac{1}{N} \sim \frac{(CP)^{2^l}}{C} \rightarrow l_{max}$ が決まる。

ホビ-ノットは l_{max} $1/2-2 P_{l_{max}} = O\left(N \frac{\log N}{4(CP)^{2^l}}\right)$
 1/N スピードアップが実現する。