

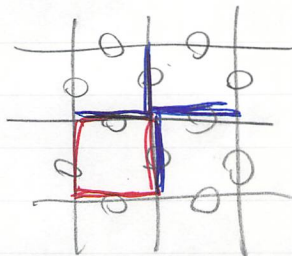
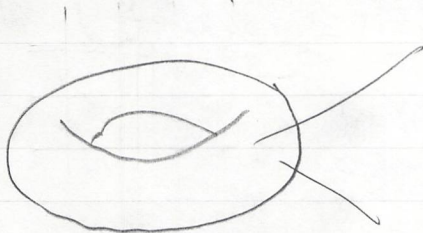
§4 トポロジカル符号と誤り耐性量子計算

No.

Date

4-1

⑥ トポロジカル表面符号 (局所 並進対称性)



辺上に qubit の
配置
→ $2N^2$

$N \times N$ の正格子 (周期的境界条件)

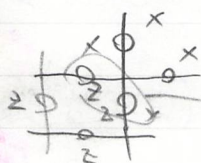
✓ スタビライザ: 頂点 v と面 f に対して,

$$A_f = \prod_{i \in \partial f} Z_i$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}$
面 f の周りの辺

$$B_v = \prod_{j \in \delta v} X_j$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}$
 v に接続する辺



必ず偶数個重なる.

→ 符号状態は A_f と B_v の $+1$ の固有状態 $|\Psi\rangle$

✓ 符号空間の次元.

$$\# \text{qubit} \equiv 2N^2$$

$$\# \text{独立なスタビライザ} \quad |V| + |F| - 2 = N^2 + N^2 - 2$$

$$2^{2N^2 - (N^2 + N^2 - 2)} = 2^2 = 4.$$

一般の平面では,

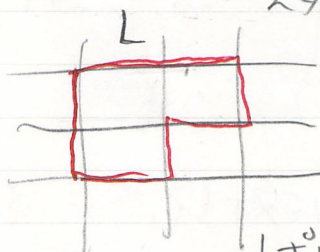
$$|V| + |F| - |E| = 2 - 2g \quad (\text{オイラ-標数})$$

$$2^{|E| - (|V| + |F| - 2)} = 2^{2g} \quad \text{genus} = \text{ハドルの数.}$$

$2g$ qubit 分の空間がある.

✓ logical operator (符号空間に作用する演算子)

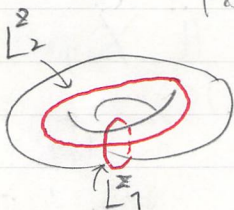
- ステライザーと可換
- ステライザーと独立.



自明なループ上の Z
(トラスにまつけない)

→ A_F の積でかける.

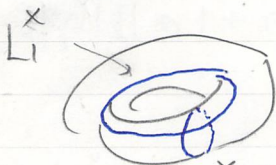
トポロジカルに非自明なループ上の Z



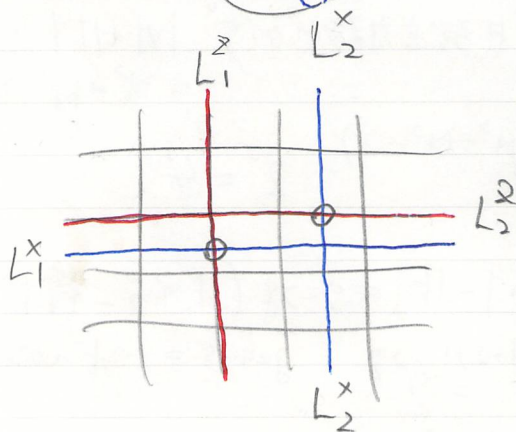
→ A_F の積でかけない
= 独立.

L_1^Z, L_2^Z 2つの logical Z operator

× 演算子に関しては双対格子 (半分ずらす)
上の 非自明なループ:



L_1^x, L_2^x 2つの logical X operator.



L_1^Z と L_1^x は反交換

L_2^Z と L_2^x は反交換.

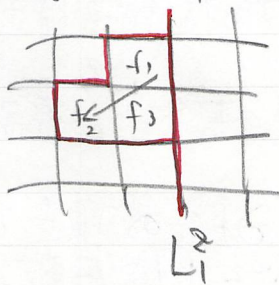
→ 符号空間に作用する
logical Pauli operator

$|0\rangle, |1\rangle$ は L_1^Z の固有状態.

$|0\rangle, |1\rangle$ は L_2^Z の固有状態.

✓ 符号距離 $\rightarrow N$

✓ logical operator の作用



$$L_1^z |\Psi\rangle = L_1^z A_{f_1} A_{f_2} A_{f_3} |\Psi\rangle$$

$$= L_1^z |\Psi\rangle$$

(作用はスタックの積のと同じ値)

ループを消す(トポロジ変換)に等しい作用(トポロジ変換)と同じ。

→ 作用はトラスのまっすぐな形で決まる

トポロジ分類

Chain complexを用いた定式化.

$$B_0 = \{u_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \quad B_1 = \{e_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \quad B_2 = \{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

$\mathbb{Z}$ 基底として $\mathbb{Z}_2$ 上の線形空間 C_0, C_1, C_2 とする.

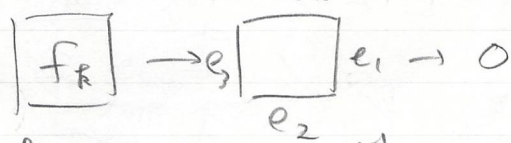
$$C_0 = \sum_i \mathbb{Z}_2 u_i, \quad C_1 = \sum_j \mathbb{Z}_2 e_j, \quad C_2 = \sum_k \mathbb{Z}_2 f_k$$

boundary map $d_i: C_i \rightarrow C_{i-1}$

(homomorphism)
準同型

$d_{i-1} \circ d_i = 0$ とする(1つのスタックで決まる).

境界, 端点を
取り出す.



qubit. $\rightarrow \{e_j\}$, スタック $A_k = \mathbb{Z}(f_k)$, $B_i = (\bar{u}_i)$

1-chain

閉ループ (cycle)

2-chain

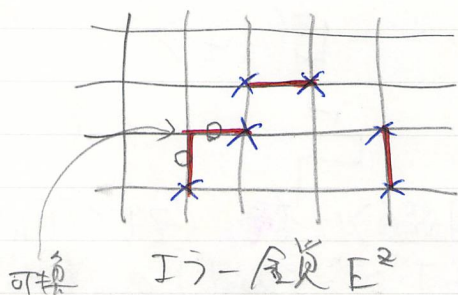
スタック chain complex の 2-chain

ホモロジース

$$h_i = \ker(d_i) / \text{Im}(d_{i+1}) \leftarrow \text{スタックの同位数}$$

✓ エラーの検出(シンドローム測定)

エラーがなければスタビライザの固有値は+1のはず

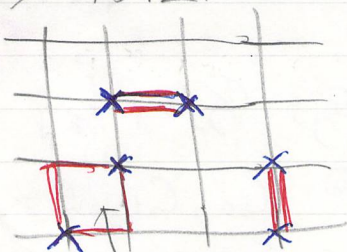


エラー-鎖 E^z (格子土)

→ エラー-鎖 E^z の頂点の固有値が -1 に反転

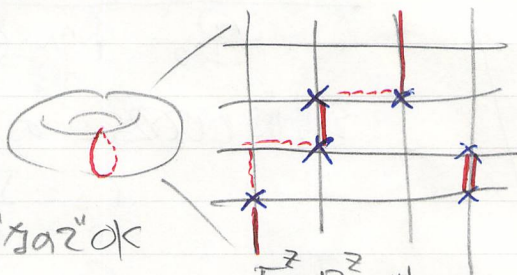
(エラー-鎖は双対格子上で同じことをする)

✓ エラー訂正



$E^z + R^z$ が自明なループはスタビライザなのでOK

シンドローム E^z からエラー- E^z を推定する. $\rightarrow R^z$



$E^z + R^z$ が自明なループになると失敗

✓ 最小距離復号

$$P(E^z) = \prod_{i \in E} (1-p)^{1-\eta_i} p^{\eta_i} \quad \left(\eta_i = \begin{cases} 1 & i \in E^z \\ 0 & i \notin E^z \end{cases} \right)$$

$$R^z = \arg \max_{E^z} P(E^z)$$

→ $\sum \eta_i$ が最小 → エラー-鎖 E^z が最小

P が十分小さいと論理エラー確率は

$$P_L \sim \text{poly}(N) (CP)^{\frac{N}{2}}$$

の全 E^z 中 E^z が最小 (minimum weight perfect matching)

トポロジカル秩序との対応.

トポロジカル秩序 $\rightarrow$ 局所性
並行対称性

Kitaev
Toric code
ハミルトニアン.

$$H = -J \left(\sum_f A_f + \sum_n B_n \right)$$

$\rightarrow$ 基底状態は、表面符号状態.

$$\left(\begin{aligned} |\Psi\rangle &\propto \prod_n \left(\frac{I + B_n}{2} \right) |00\dots 0\rangle \\ &\rightarrow \text{すべての } n \rightarrow \text{基底状態の和.} \\ &\rightarrow \bigotimes_{e \in E} \langle \alpha | |\Psi\rangle \propto \sum_{\{ \alpha \}} \text{インジカル関数} \end{aligned} \right)$$

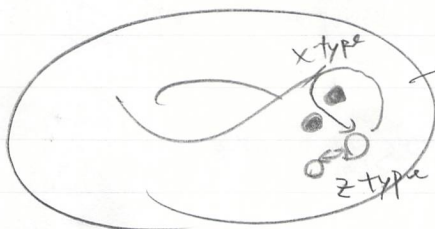
基底状態は縮退している (4重)

縮退が任意の局所擾乱に対してとけな
(エラーストロフ符号の性質)

$\leftarrow$ トポロジカル秩序の是非.

(ランダウ-ギンズブルグ理論
= 局所秩序パラメータと対称性の破れ
では記述できない量) 相

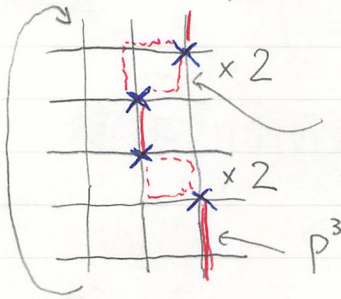
エラー 端 $\rightarrow$ 局所起による粒子の対生成
"イオン"



$\rightarrow$ braidすると
位相がつか
(アベリアン)

✓ 誤り訂正とスピングラス

最小距離復号は最適ではない。



事後確率
成効

$$P_s = \sum_{R^2 | R^2 + E^2 = \text{trivial}} P(R^2 | \partial E^2)$$

4x4 真の正解とは異なる

$r_i = \begin{cases} 0 & i \in R^2 \\ 1 & i \in E^2 \end{cases}$

$R^2 + E^2 = L$
trivial cycle.

$$P(R^2 | \partial E^2) = \frac{1}{N_i} \prod_i \left(\frac{p}{1-p} \right)^{\eta_i \oplus \epsilon_i}$$

変数変換. $r_i = \eta_i \oplus \epsilon_i$ を代入

辺 ϵ_i

面心 ϵ_i, j
面の辺 $\epsilon(i, j)$

自明なループ
条件を自動的に
満たすように
変数を動かす。

$$= \frac{1}{N_i} \prod_i \left(\frac{p}{1-p} \right)^{\eta_i \oplus \epsilon_i}$$

$$= \frac{1}{N_{\langle ij \rangle}} \prod_{\langle ij \rangle} \left(\frac{p}{1-p} \right)^{\eta_{ij} \oplus \epsilon_i \oplus \epsilon_j}$$

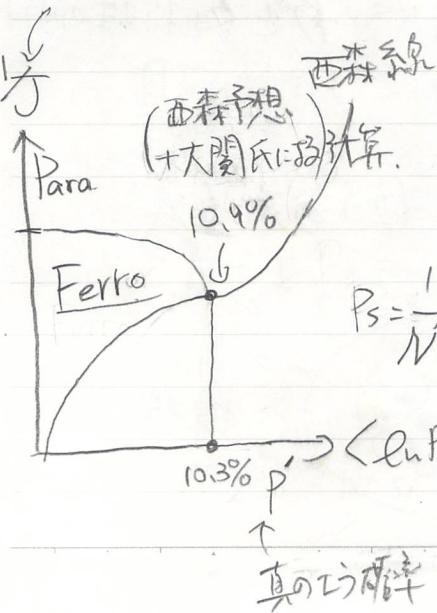
L : trivial cycle.

0, 1 変数を ± 1 変数にかえる。

事後確率のパラメータ

$$= \frac{1}{N'} \exp \left[\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \right]$$

↑
イジング模型の中心に因る



$$J_{ij} = \pm J \quad e^{-J} = \sqrt{p/(1-p)}$$

↳ E^2 の分布で決まる。

$$P_s = \frac{1}{N} \sum_{\{ \sigma_i \}} \exp \left[\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \right] \propto Z(\{ J_{ij} \})$$

分配関数

$$\langle \ln P_s \rangle_{E^2} = \sum_{\{ J_{ij} \}} \underbrace{P(\{ J_{ij} \})}_{\sim \text{真の正解率}} \ln Z(\{ J_{ij} \})$$

$$= \langle \ln Z(\{ J_{ij} \}) \rangle$$