

第1 量子情報の基礎

① 量子ビット

✓ 量子ビット (qubit) $|4\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
(最小の情報量の単位)

$$|0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{複素2次元ベクトル空間の正規基底}$$

ディラック表記 $|4\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ をベクトル $\rightarrow$ "qubit"

$$\langle 4| \equiv |4\rangle^\dagger = (\alpha^*, \beta^*)$$

行ベクトル "ブラ" "エム" 共役 (複素共役)

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (\text{規格化})$$

$|0\rangle, |1\rangle$ "計算基底" といふことになる。
✓ 表記、計算の例

$$|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}, \quad |-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \langle 0|+ \rangle &= \langle 0|(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} \\ &= 1/\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle +|- \rangle &= (\langle 0| + \langle 1|)(|1\rangle - |0\rangle)/2 \\ &= (1 - 1)/2 = 0 \end{aligned}$$

✓ ブロッホ球

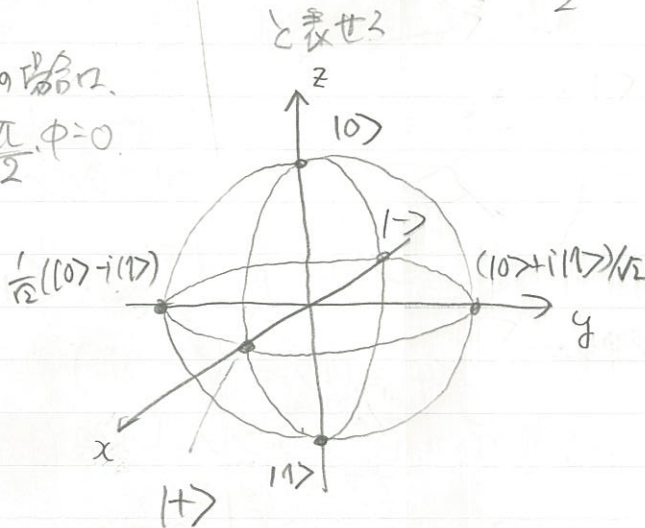
α と β はグローバルな位相を除いて

$$\alpha = \cos \frac{\theta}{2}$$

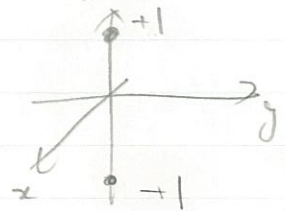
$$\beta = e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}$$

θ と ϕ で球面上に表現
の点

$|+\rangle$ の場合
 $\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0$



古典ビットは $|0\rangle$ or $|1\rangle$ のみしかとらえない



② 量子演算

量子系の時間発展はユニタリ演算子で表現される、
($U U^\dagger = I$)

✓ Pauli 演算子

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $|0\rangle, |1\rangle$ は Z の固有状態 $|+\rangle, |-\rangle$ は X の固有状態
- X は量子ビットを反転: $X|0\rangle = |1\rangle$
- Z は量子ビットの位相を反転: $Z|+\rangle = |-\rangle$
- 互いに反交換 $XZ = -ZX$ etc.
- $Y = iXZ$
- 任意の 2×2 行列は Pauli 演算子で展開できる

✓ Hadamard演算.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H|0\rangle = |+\rangle, \quad H|1\rangle = |-\rangle$$

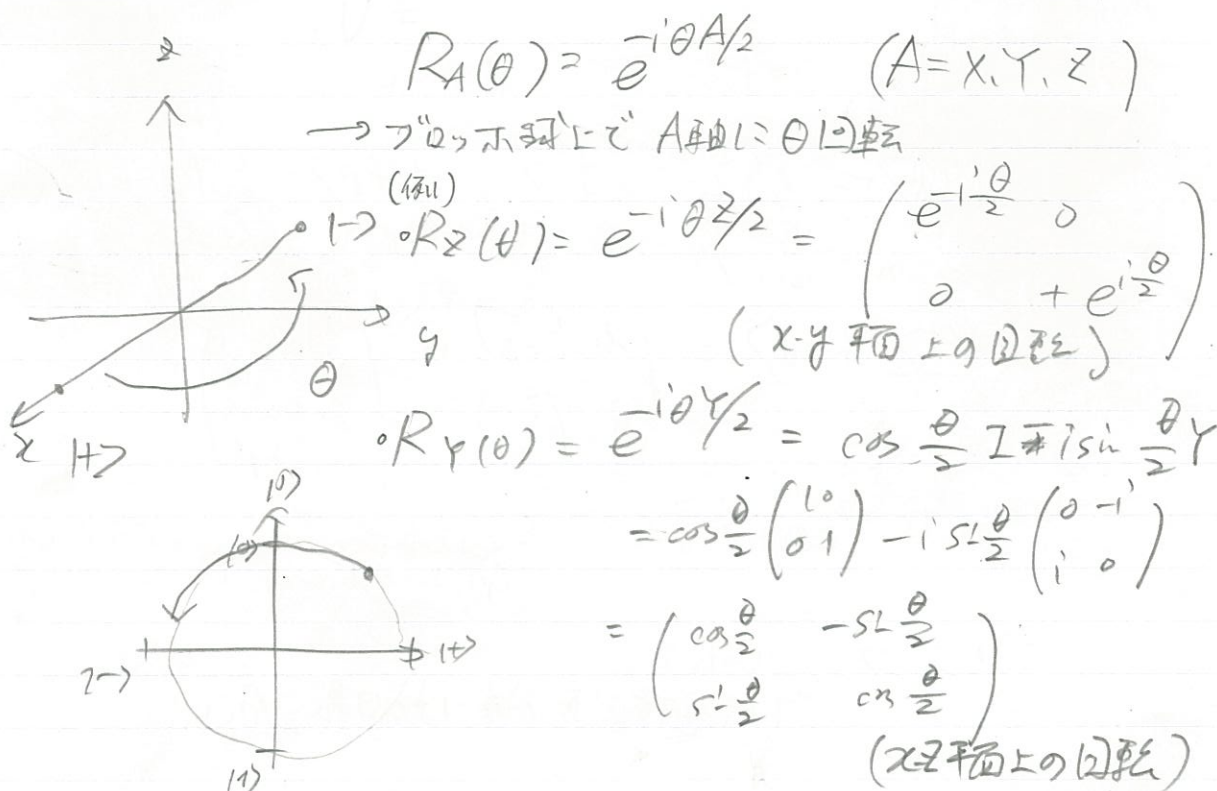
$|0\rangle, |1\rangle$ 基底 Σ , $|+\rangle, |-\rangle$ 基底に交換.

✓ 単一量子ビットの回転 $\rightarrow SU(2)$

2×2 の行列系 $\rightarrow SU(2)$ 群の元.

$$R_A(\theta) = e^{-i\theta A/2} \quad (A = X, Y, Z)$$

$\rightarrow$ フォック空間上で A 軸に θ に回転



ユニタリ分解: 任意の $SU(2)$ の元 U は、

$$U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta)$$

と分解できる.

⑥ 多量子ビット系

✓ 合成系はテンソル積で記述される。
2量子ビットの場合は

$$|0\rangle \otimes |0\rangle, |0\rangle \otimes |1\rangle, |1\rangle \otimes |0\rangle, |1\rangle \otimes |1\rangle$$

と、その重ねあわせが基底として与えられる
→ 2^2 次元空間

$$|4\rangle = C_{00}|0\rangle \otimes |0\rangle + C_{01}|0\rangle \otimes |1\rangle$$

✓ 列ベクトルのテンソル積 → フロベニウス積

$$+ C_{10}|1\rangle \otimes |0\rangle + C_{11}|1\rangle \otimes |1\rangle$$

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|4_A\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle, \quad |4_B\rangle = b_0|0\rangle + b_1|1\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$|4_A\rangle \otimes |4_B\rangle = \begin{pmatrix} a_0 \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \\ a_1 \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 b_0 \\ a_0 b_1 \\ a_1 b_0 \\ a_1 b_1 \end{pmatrix}$$



この形と書ける状態を直積状態もしくはセパラブル状態 (product state)

• エンタングル状態

代すは直積状態で書けるとは限らない。

$$\text{例)} \quad |4_{\text{Bell}}\rangle = (|00\rangle + |11\rangle) / \sqrt{2}$$

以後テンソル積 $\otimes$ の2-7は省略し、 $|i\rangle \otimes |j\rangle$

を $|ij\rangle$ と書く

一般に、 n 量子ビット系の状態は 2^n 個の基底を用いて、

$$|i\rangle = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} |i_1 i_2 \dots i_n\rangle$$

→ すべての $(i_1 \dots i_n)$ の組み合わせで和をとる。

2) 量子ビットの数に対して指数的に多くの基底が必要。 ← 効率の良い記述が必要。

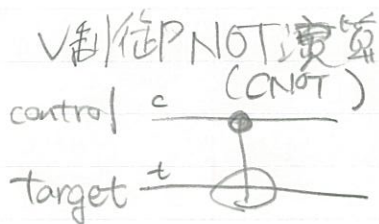
① 多量子ビット系の演算 $\rightarrow SU(2^n)$

V 演算子のテンソル積

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$$

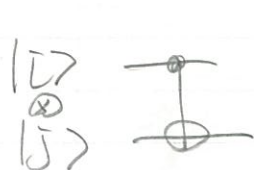
$$U \otimes V = \begin{pmatrix} u_{11} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} & u_{12} \begin{pmatrix} - \\ - \end{pmatrix} \\ u_{21} \begin{pmatrix} - \\ - \end{pmatrix} & u_{22} \begin{pmatrix} - \\ - \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(例) X \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad Z \otimes X = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -X \end{pmatrix}$$



$$\Lambda_c(X) = |0\rangle_c \langle 0| \otimes I_t + |1\rangle_c \langle 1| \otimes X_t$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$|i\rangle |j\rangle \rightarrow |i \oplus j\rangle \quad \left(\begin{array}{l} \text{2つの基底を足すと} \\ \text{XORに対応} \end{array} \right)$$

(mod 2の和)

$$(例) \Lambda_{1,2}(X) |1\rangle_1 |0\rangle_2 = (|00\rangle + |11\rangle) / \sqrt{2}$$

エンタングル状態を生成する。

✓ 制御A演算 $A_{12}(A) = |0\rangle\langle 0|_1 \otimes I_2 + |1\rangle\langle 1|_1 \otimes A_2$



特に
 $A=Z$ の場合は



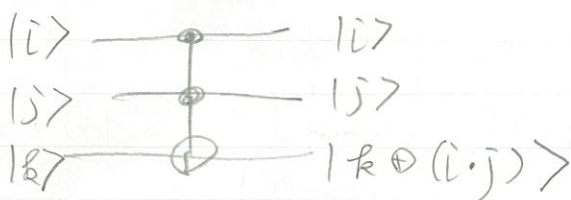
✓ Toffoli演算 (3量子ビット演算)



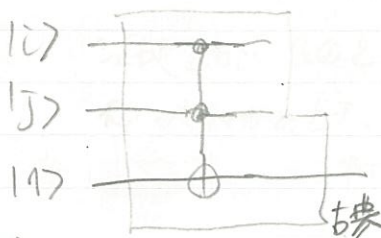
$$(I - |11\rangle\langle 11|_{c_1 c_2}) \otimes I_t + |11\rangle\langle 11|_{c_1 c_2} \otimes X_t$$

c_1 と c_2 共に 1 のときだけ、 X_t と作用。

$|i\rangle, |j\rangle, |k\rangle$ 式入力の時、



$|i\rangle, |j\rangle$ 入力, $k=1$ とすれば $|i \oplus (i \cdot j)\rangle$ は NAND 演算の出力と同じ。



NAND
=

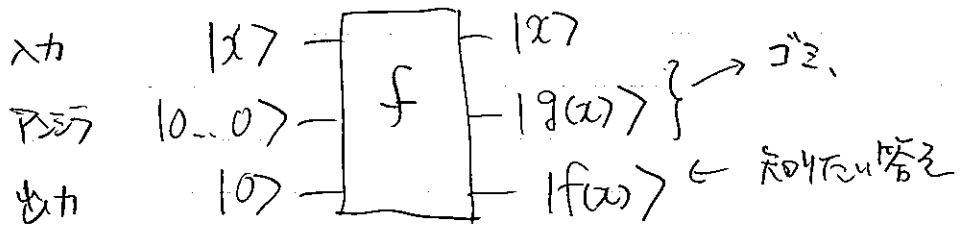
NAND 演算を用いて任意の論理回路を構成できる。
Toffoli と AND と NOT を用いて任意の古典論理回路を
(補助ビット) 作る。

⇒ 量子回路は古典回路を含む。

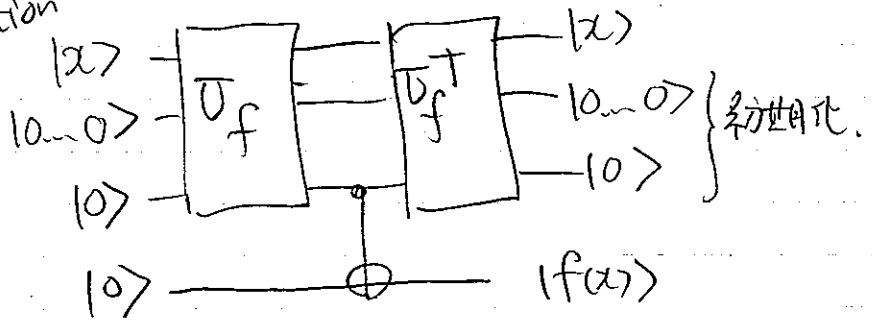
X, XOR, Toffoli

1-4

✓ 可逆計算



uncomputation



回路状態も含めて可逆に計算できる。

Bennett, Toffoli, Benioff, Fredkin

① 量子状態の測定と密度演算子.

1-5

✓ 射影測定.

$| \psi \rangle$ を基底 $\{ | \phi_i \rangle \}$ で測定

測定結果 i を得る確率は

$$P_i = | \langle \phi_i | \psi \rangle |^2 \quad (\text{Born 則})$$

測定後の状態は $| \phi_i \rangle$.

(例) $\circ | + \rangle = (| 0 \rangle + | 1 \rangle) / \sqrt{2}$ に対して $\{ | 0 \rangle, | 1 \rangle \}$ の測定

$$P_0 = | \langle 0 | + \rangle |^2 = \frac{1}{2} \quad P_1 = | \langle 1 | + \rangle |^2 = \frac{1}{2}$$

$$\circ \alpha | 0 \rangle + \beta | 1 \rangle$$

$$P_0 = |\alpha|^2$$

$$P_1 = |\beta|^2$$

$$P_0 + P_1 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

✓ 射影演算子.

$$P_i = | \phi_i \rangle \langle \phi_i | \text{ だと } P_i P_j = \delta_{ij} P_i$$

$$\sum_i P_i = I$$

$$\circ \text{測定確率 } P_i = \| P_i | \psi \rangle \|^2$$

$$(\| | a \rangle \| = \langle a | a \rangle)$$

(例)

$$P_+ = | + \rangle \langle + | = \frac{E_x}{2}$$

$$P_- = | - \rangle \langle - | = \frac{E_x}{2}$$

$$\circ \text{測定後の状態 } P_i | \psi \rangle / \sqrt{P_i}$$

別の表現.

$$P_i = \text{Tr} [P_i | \psi \rangle \langle \psi |]$$

トース

$\text{Tr} [A]$ は 正交基底 $\{ | i \rangle \}$ に対して

$$\text{Tr} [A] = \sum_i \langle i | A | i \rangle$$

$$\text{Tr} [ABC] = \text{Tr} [BCA]$$

演算子 $| 4 \times 4 |$ と状態, P_i を観測量と見ると.

✓ 密度演算子

$|4_1\rangle$ と $|4_2\rangle$ が $\sum_i \epsilon_i^2 = 1$ の ϵ_1, ϵ_2 で与えられるとき、 $\{\rho_i\}$ の測度は

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \epsilon_1 \text{Tr}[\rho_0 |4_1\rangle\langle 4_1|] + \epsilon_2 \text{Tr}[\rho_0 |4_2\rangle\langle 4_2|] \\ &= \text{Tr}[\rho_0 (\epsilon_1 |4_1\rangle\langle 4_1| + \epsilon_2 |4_2\rangle\langle 4_2|)] \\ \rho_1 &= \epsilon_1 \text{Tr}[\rho_1 |4_1\rangle\langle 4_1|] + \epsilon_2 \text{Tr}[\rho_1 |4_2\rangle\langle 4_2|] \\ &= \text{Tr}[\rho_1 (\epsilon_1 |4_1\rangle\langle 4_1| + \epsilon_2 |4_2\rangle\langle 4_2|)]\end{aligned}$$

$$\rightarrow \rho = \epsilon_1 |4_1\rangle\langle 4_1| + \epsilon_2 |4_2\rangle\langle 4_2|$$

と思っよう。

混合状態。

(例)

$|4\rangle$ に対して確率 ϵ でビット反転 X が作用。

$$(1-\epsilon) \rightarrow |4\rangle$$

$$\epsilon \rightarrow X|4\rangle$$

$$\rho = (1-\epsilon)|4\rangle\langle 4| + \epsilon X|4\rangle\langle 4|X$$

密度演算子はエルミート、半正定値、 $\text{Tr}[\rho] = 1$ 。

$$\langle 4|, \langle 4|(\rho|4\rangle) \geq 0$$

ρ に対する射影測定は、

$$P_i = \text{Tr}[\rho P_i] \geq 0$$

$$\sum_i P_i = \text{Tr}[\rho] = 1.$$

✓ 密度演算子の時間発展

$$\rho = \sum_i P_i |4_i\rangle\langle 4_i| \text{ ならば } |4_i\rangle \rightarrow U|4_i\rangle$$

$$\rho \rightarrow U\rho U^\dagger = \sum_i P_i U|4_i\rangle\langle 4_i|U^\dagger$$

✓ 一般化測定

E_i は半正定値、 $\sum E_i = I$ として

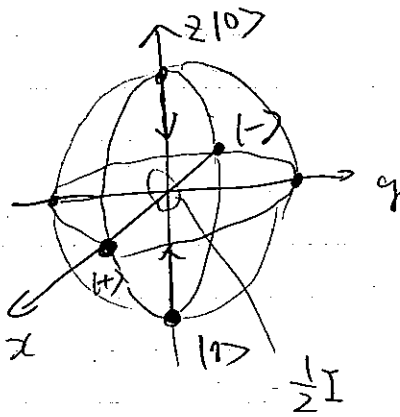
$$P_i = \text{Tr}[E_i \rho] \rightarrow \text{POVM 測定}$$

positive valued operator measure

測定後の状態は、 $E_i = M_i^\dagger M_i$ なる M_i を用いて

$$\rho' = M_i \rho M_i^\dagger / P_i$$

✓ Bloch球



$$(x, y, z) = (\text{Tr}[x\rho], \text{Tr}[y\rho], \text{Tr}[z\rho])$$

$$\rho = \frac{I + xX + yY + zZ}{2}$$

$$\text{純粋状態 } \text{Tr}[\rho^2] = 1 = x^2 + y^2 + z^2$$

混合状態は球の内部。

$$\rho \rightarrow \rho' = (1-\epsilon)\rho + \epsilon X \rho X$$

(ゼット反転1/2)

 $\epsilon = 1/2$ のとき、

$$\rho' = \frac{1}{2}I \quad \text{完全混合状態}$$

✓ 重ねあわせと混合のちがひ...

$$\rho_M = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| \quad \rho_S = \frac{1}{2}|+\rangle\langle +|$$

{|0>, |1>} の測定

$$\text{Tr}[|0\rangle\langle 0| \rho_M] = \frac{1}{2} \quad \text{Tr}[|0\rangle\langle 0| \rho_S] = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tr}[|1\rangle\langle 1| \rho_M] = \frac{1}{2} \quad \text{Tr}[|1\rangle\langle 1| \rho_S] = \frac{1}{2}$$

$\rightarrow |0\rangle, |1\rangle$

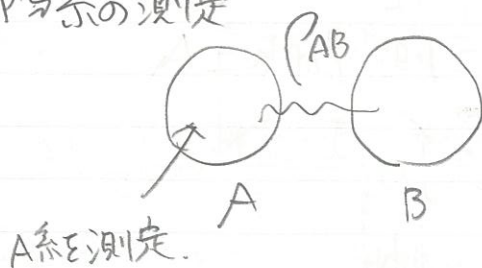
{|+>, |->} の測定

$$\text{Tr}[|+\rangle\langle +| \rho_M] = \frac{1}{2} \quad \text{Tr}[|+\rangle\langle +| \rho_S] = 1$$

$$\text{Tr}[|-\rangle\langle -| \rho_M] = \frac{1}{2} \quad \text{Tr}[|-\rangle\langle -| \rho_S] = 0$$

$\rightarrow \text{SM}^{\vee}$

部分系の測定



A系の射影演算子を $\{P_i^A\}$ とすると

$\{P_i^A \otimes I^B\}$ による射影測定
↓ を行う。
(射影演算子になっている。)

$$P_i = \text{Tr}_{AB} [(P_i^A \otimes I^B) \rho_{AB}]$$

$$= \text{Tr} [P_i^A \rho_A]$$

ただし、 $\rho_A = \text{Tr}_B [\rho_{AB}]$

$$= \sum_k [{}^A\langle k | {}_B \rho_{AB} I \otimes | k \rangle_B]$$

A系のみを測定を行うときは、
状態 ρ_A を用いて計算すればよい

$|k\rangle_B$ は B 上の正規直交基底。

↑
reduced density matrix
縮約密度行列

$$\left(\begin{array}{l} \text{Tr}_B [\rho_A \otimes \rho_B] \\ = \rho_A \end{array} \right)$$

$\text{Tr}_B [\cdot]$ を部分トレース と呼ぶ。
(partial)