③ 量子誤り訂正

◎ 量子ノイズ

○ 測定

$$P_0 = |\langle 0|\psi\rangle|^2$$

$$= \langle\psi|0\rangle\langle 0|\psi\rangle$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\,|0\rangle\langle 0|\;|\psi\rangle\langle\psi|\,\right]$$

トレース $\begin{pmatrix} \circ & & \\ & \ddots & \\ & & \circ \end{pmatrix}$
(対角項の和)

$$\mathrm{Tr}[A] = \sum_i \langle i|A|i\rangle$$

一般に

$$p_a = \mathrm{Tr}\left[\underline{P_a}\,|\psi\rangle\langle\psi|\right]$$

射影演算子

$$\left(\sum_a P_a = I,\quad P_a P_b = \delta_{ab} P_a\right)$$

○ 混合状態

確率 q で $|\psi\rangle$, $1-q$ で $|\phi\rangle$
が与えられるとき.

$$p_a = q\,\mathrm{Tr}\left[P_a|\psi\rangle\langle\psi|\right] + (1-q)\,\mathrm{Tr}\left[P_a|\phi\rangle\langle\phi|\right]$$

$$= \mathrm{Tr}\left[P_a\left(q|\psi\rangle\langle\psi| + (1-q)|\phi\rangle\langle\phi|\right)\right]$$

これを状態だと思おう.

$$= \mathrm{Tr}[P_a \rho] \qquad \rho = q|\psi\rangle\langle\psi| + (1-q)|\phi\rangle\langle\phi|$$

密度演算子

$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ 純粋状態 (pure state)

○ 混合と重ねあわせの違い

$\rho = |+\rangle\langle+| \rightarrow p_0 = \mathrm{Tr}\left[|0\rangle\langle0|+\rangle\langle+|\right]$

$= \mathrm{Tr}\left[|0\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\langle+|\right]$

$= \sum_{i=0,1}\langle i|\,|0\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\langle+|\,|i\rangle$

$= \frac{1}{2}$、, $p_1 = \frac{1}{2}$

$p_+ = \mathrm{Tr}\left[|+\rangle\langle+|+\rangle\langle+|\right]$, $p_- = 0$、

$= 1$.

$\rho' = \frac{1}{2}|0\rangle\langle0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle1|$ (0と1の古典的混合).

$p'_0 = \frac{1}{2}$, $p'_1 = \frac{1}{2}$ (同じ)

$p'_+ = \mathrm{Tr}\left[|+\rangle\langle+|\left(\frac{1}{2}|0\rangle\langle0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle1|\right)\right]$

$= \frac{1}{2}$

$p'_- = \frac{1}{2}$ (混合と重ねあわせの違い).

○密度演算子、

✓ $\rho = \rho^\dagger$ (エルミート)

✓ $\rho \geq 0$ (半正定値)

($\forall |\psi\rangle$, $\mathrm{Tr}[|\psi\rangle\langle\psi|\rho] \geq 0$
固有値が非負)

✓ $\mathrm{Tr}[\rho] = 1$、 ($\sum_a P_a = \sum_a \mathrm{Tr}[P_a \rho]$
$= \mathrm{Tr}[\rho] = 1$)

○量子操作、

$|\psi\rangle \to U|\psi\rangle$、

$\rho \to U \rho U^\dagger$ (ユニタリ)

一般には密度演算子の状態ーに移す線形写像 $\longrightarrow$ CPTP map

(complete positive trace preserving map)

○ Kraus表現

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger$$

Kraus演算子

$$\left(\sum_k E_k^\dagger E_k = I \leftarrow \mathrm{Tr}[\mathcal{E}(\rho)] = \mathrm{Tr}[E_k^\dagger E_k \rho] \right)$$

例) $|0\rangle \longrightarrow$ 確率 p でパウリXを作用.

$$(1-p)|0\rangle\langle 0| + p|1\rangle\langle 1|$$

$$\mathcal{E}_X(\rho) = (1-p)\rho + pX\rho X$$

ビット反転エラー

$$\mathcal{E}_Z(\rho) = (1-p)\rho + pZ\rho Z$$

位相反転エラー.

$$\mathcal{E}_{in}(\rho) = (1-p)\rho + p|0\rangle\langle 1|\rho|1\rangle\langle 0| + p|0\rangle\langle 0|\rho|0\rangle\langle 0|$$

確率的ノイズモデル.

□ デコヒーレンス、

量子系　　環境系、(外場のゆらぎ、不純物etc.

(例)

$$(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)\otimes|+\rangle$$

$$\downarrow \quad e^{-i\frac{\theta}{2}Z\otimes Z}, \quad = \cos\frac{\theta}{2} I + i\sin\frac{\theta}{2} Z\otimes Z.$$

$$e^{-i\frac{\theta}{2}}\frac{\alpha|00\rangle+\beta|11\rangle}{\sqrt{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\frac{\alpha|01\rangle+\beta|10\rangle}{\sqrt{2}}$$

エンタングルする、

環境のことは何も知らない → 測定して忘れる

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}}\alpha|0\rangle + e^{i\frac{\theta}{2}}\beta|1\rangle \qquad P_0^E = \frac{1}{2}$$

or

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}}\beta|1\rangle + e^{i\frac{\theta}{2}}\alpha|0\rangle \qquad P_1^E = \frac{1}{2}$$

$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

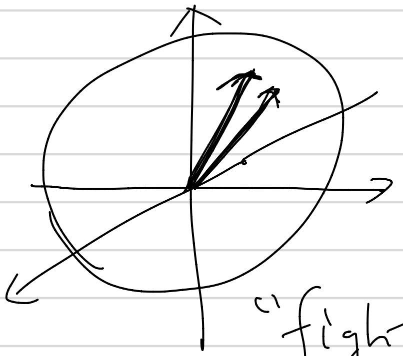
$\longrightarrow |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + \cos\theta\left(\alpha\beta^*|0\rangle\langle 1| + \alpha^*\beta|1\rangle\langle 0|\right) + |\beta|^2|1\rangle\langle 1|$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1|$

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1+\cos\theta}{2}\rho + \frac{1-\cos\theta}{2} Z \rho Z$$

確率 $\frac{1-\cos\theta}{2}$ で、パウリZが作用する。

① 量子誤り訂正 (Shor)



・エラーは連続的

・量子状態のコピーはできない

"fight entanglement with entanglement"
by Preskill

$$\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle \longrightarrow \alpha|000\rangle+\beta|111\rangle$$

$\{|000\rangle, |111\rangle\}$で貼られる

$A_k = I\otimes I\otimes\cdots\otimes A\otimes\cdots I$
k番目.

2次元部分空間にうめこむ

code space

Z_2Z_3 \ Z_1Z_2	+1	−1
+1	$\lvert 000\rangle$ $\lvert 111\rangle$	$\lvert 100\rangle$ $\lvert 011\rangle$
−1	$\lvert 001\rangle$ $\lvert 110\rangle$	$\lvert 010\rangle$ $\lvert 101\rangle$

X_1 X_3 X_2

シンドローム

logical operator
Z_1
$X_1X_2X_3$

エラーと反交換するstabilizerの固有値が反転する。

ビット反転エラーが発生すると直交空間へ。

stabilizer

Z_1Z_2, Z_2Z_3の固有値を測ることによって量子状態を壊さずにエラーを知る。

○ スタビライザー形式 (Gottesman)

スタビライザ群 $\mathcal{S}$

- $S_i \in \mathcal{S}$ はパウリ積, $\mathcal{S} \subset \{\pm 1, \pm i\} \times \{I, X, Y, Z\}^{\otimes n}$
- $^{\forall} S_i, S_j \in \mathcal{S}$, $[S_i, S_j] = 0$. 可換.
- $-I \notin \mathcal{S}$ 固有値は ± 1.

スタビライザ状態

$$S_i |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \quad \text{for all } i.$$

を満たす状態 $|\Psi\rangle$

(例) $\{I, X_1X_2, Z_1Z_2, -Y_1Y_2\} = \langle \underbrace{\{X_1X_2, Z_1Z_2\}}_{\text{生成元}} \rangle$

$$\longrightarrow (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$$

○ 5 qubit code.

可換なパウリ演算子の固有状態として状態選ぶ

$S_1 = ZXXZI$

$S_2 = IZXXZ$

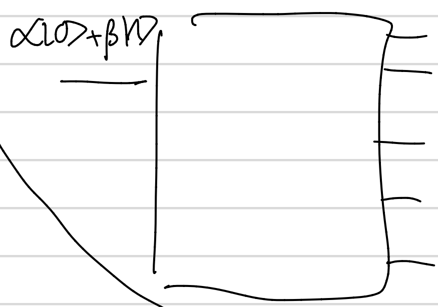
$S_3 = ZIZXX$

$S_4 = XZIZX$

$S_i|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$ for all i

また2次元の縮退が残る.

$2^5/2^4 = 2$次元の部分空間.



→ logical operator
(縮退を解く演算)

$\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$

holographic code.

(ADS/CFT)

Pastawski et al '15

$L^z = ZZZZZ$ $\quad L^x = XXXXX$

ともに $S_1 \sim S_4$ と可換.

$\longrightarrow S_i(L^x|\Psi\rangle) = (L^x|\Psi\rangle)$

$\underbrace{L^x|\Psi\rangle}$ ↓ これも同じ subspace へ.

$S_1 \sim S_4$ と独立.

$L_z|\bar{0}\rangle = |\bar{0}\rangle, \quad L_z|\bar{1}\rangle = -|\bar{1}\rangle$

$L_xL_z = -L_zL_x$ より $\quad L_x|\bar{0}\rangle = |\bar{1}\rangle$

$\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle \longrightarrow \alpha|\bar{0}\rangle+\beta|\bar{1}\rangle$

$$|\bar{0}\rangle = \frac{1}{4}\Big(|00000\rangle + |10010\rangle + |01001\rangle + |10100\rangle + |01010\rangle - |11011\rangle - |00110\rangle - |11000\rangle - |11101\rangle - |00011\rangle - |11110\rangle - |01111\rangle - |10001\rangle - |01100\rangle - |10111\rangle + |00101\rangle\Big)$$

絶対書き下したくない!!!

○ 符号距離 (code distance)

$$d = \min_{\underset{\text{logical operator}}{L}} \underline{wt}(L)$$

重み=パウリ演算子の数

(例) $wt(IIXZII) = 2$

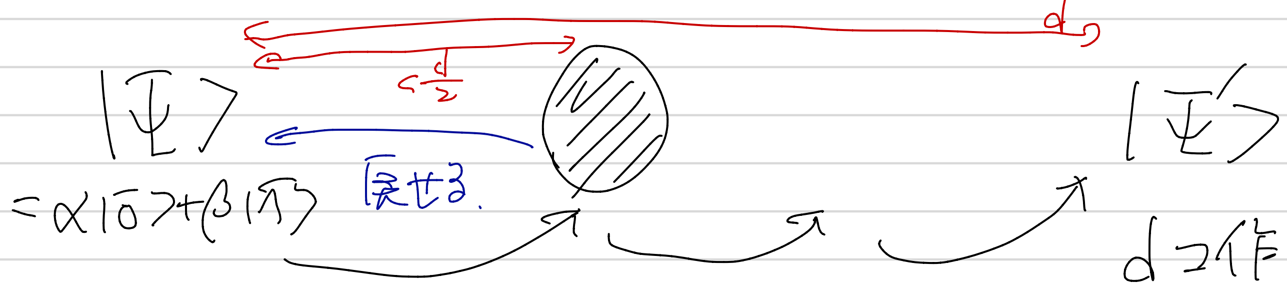
$$L_x = X^{\otimes 5}$$

$$\underline{L_x S_1} = -YIIYX \qquad wt(L_x S_1) = 3$$

↳ これも logical operator

5 qubit code の code $\underline{d = 3}$

符号距離 = 符号状態間の隔り.



パウリ演算子を1つ1つ作用させる.

dつ作用したときに符号空間はじめて戻る.

$d=3$ → 1つのエラーを訂正.

2^5次元を2^4個の直交空間へ分割.

||

16パターンのシンドローム.

各qubitに対する3種類(X, Y, Z)のエラー

$3 \times 5 = 15$

$\underbrace{15+1}_{\text{エラーなし}} = 16.$

エラーとシンドロームが1対1対応.

$S_1 \sim S_4$の固有値を測り、訂正.

$X_3 \to (+1, +1, -1, +1)$

$Z_4 \to (+1, +1, -1, -1)$

$(Y_2 Y_3) \to (+1, +1, -1, -1)$

確率pで独立にパウリエラー

→ 失敗確率は $\mathcal{O}(p^2)$

○ エラーの離散化

量子ノイズ $\mathcal{E}(\rho) = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger$
(量子ビット)

パウリ演算子とは限らない。

これまでの話

$$\mathcal{R}(A|\Psi\rangle\langle\Psi|A) = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

回復操作、 $A = X, Y, Z$

$\mathcal{R}(\rho) = \sum_l R_l \rho R_l^\dagger$ と書ける。

$R_l A|\Psi\rangle \propto |\Psi\rangle$ が満たされている。

? $\mathcal{R}\circ\mathcal{E}(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = ?$

$$E_k = c_k^I I + c_k^X X + c_k^Y Y + c_k^Z Z$$

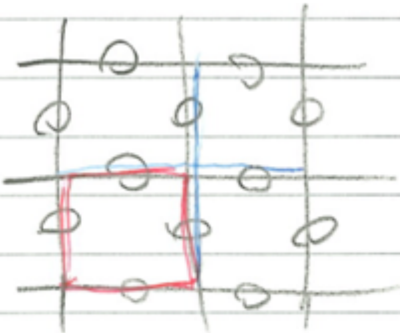
$$R_l E_k |\Psi\rangle \propto |\Psi\rangle$$

線形性、

$$\mathcal{R}\circ\mathcal{E}(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \sum_l \sum_k R_l E_k \rho E_k^\dagger R_l = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

◎ Kitaev's toric code.
(topological code)

N×Nの正方格子



辺上にqubitが配置. $\longrightarrow 2N^2$

○スタビライザー

plaquette　　　　　　star.

$$A_f = \prod_{i \in \partial f} Z_i \qquad B_v = \prod_{j \in \delta v} X_j$$

↑面fのまわり　　　↑点vに接続.

○符号状態

$\forall f, v$ 　$A_f|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$, $B_v|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$

○次元.　　#qubit $|E| = 2N^2$

#generator $|F| + |V| - \underbrace{2}_{} = 2N^2 - 2$

$\prod_f A_f = \prod_v B_v = I$

$$\dim = 2^{2N^2} / 2^{(2N^2-2)} = 2^2 = 4$$

一般の平面では、$|V| + |F| - |E| = 2 - 2g$ ← genus

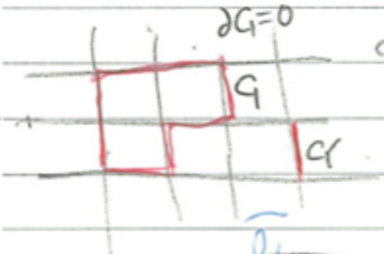
$$|E| - (|V| + |F| - 2) = 2g$$

$$\dim = 2^{2g}.$$

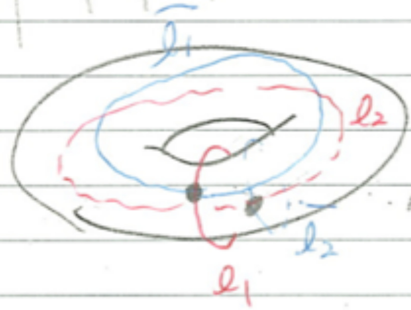
∘ logical operator

∘ stabilizer と可換 → cycle ∂c_1

∘ stabilizer と独立 → nontrivial cycle.



(trivial cycle $Z(\partial c_2) = \prod_{f \in c_2} A_f$)



$L_1^Z = Z(l_1)$, $L_2^Z = Z(l_2)$

反可換 $L_1^X = X(\bar{l}_1)$, $L_2^X = Z(\bar{l}_2)$

code distance → N.

$l_1 \sim l_1'$ つまり $\exists c_2$ s.t. $l_1' = l_1 + \partial c_2$ なら.

$Z(l_1)$ と $Z(l_2')$ の作用は同じ.

logical operator の作用

$$H = \mathrm{Ker}(\partial_1) / \mathrm{Img}(\partial_2)$$ homology class.

↑ stabilizer と可換 ↑ stabilizer group

logical operator の topology で分類.

(chain complex

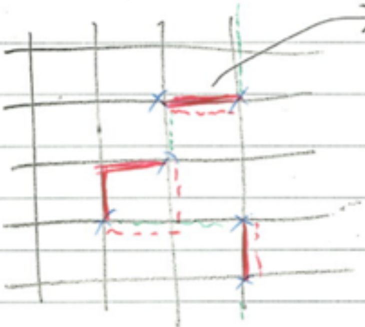
$B_0 = \{v_i\}$ $B_1 = \{e_j\}$ $B_2 = \{f_k\}$.

$c_0 = \sum_i z_i v_i$, $c_1 = \sum_j z_j e_j$, $c_2 = \sum_k z_k f_k$

boundary map (準同型) $\partial_i : C_i \to C_{i-1}$ s.t. $\partial \circ \partial = 0$.

$h_i = \mathrm{Ker}(\partial_i) / \mathrm{Img}(\partial_{i+1})$)

○エラー検出と訂正.

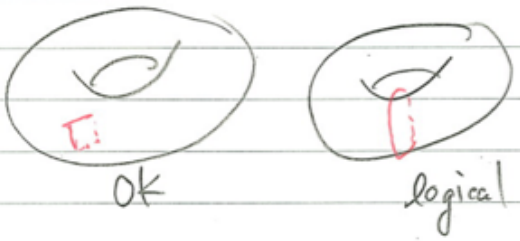


error chain c^e, Z error $Z(c^e)$

→ 端点上の star operator と反可換

$v \in \partial c^e$ → B_v の固有値が −1.

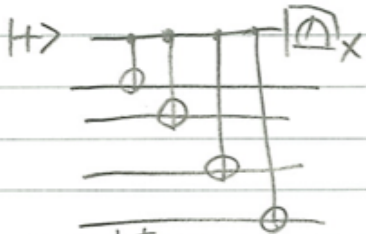
∂c^e から c^e を推定.



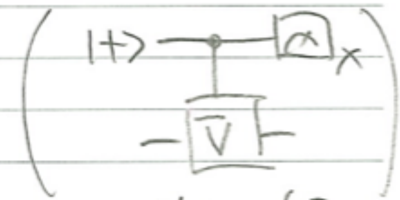
シンドローム. $\arg\max_{c^r} \mathrm{Prob}(Z(c^r))\Big|_{\partial c^r = \partial c^e}$

→ 独立なエラーの場合, 最小重みで端点をつなぐ
minum-weight-perfect-matg

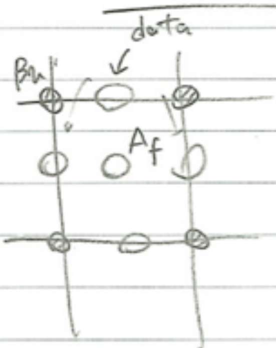
A_f と B_v の測定.



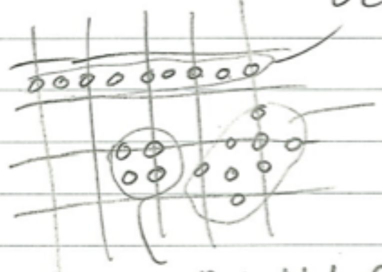
B_vの測定
(A_fの同様)



Nature '15.



Martinis's UCSB,



IBM?
(arXiv:1510.04375)

IBM Nat. Comm '15

"quantum computer quest"

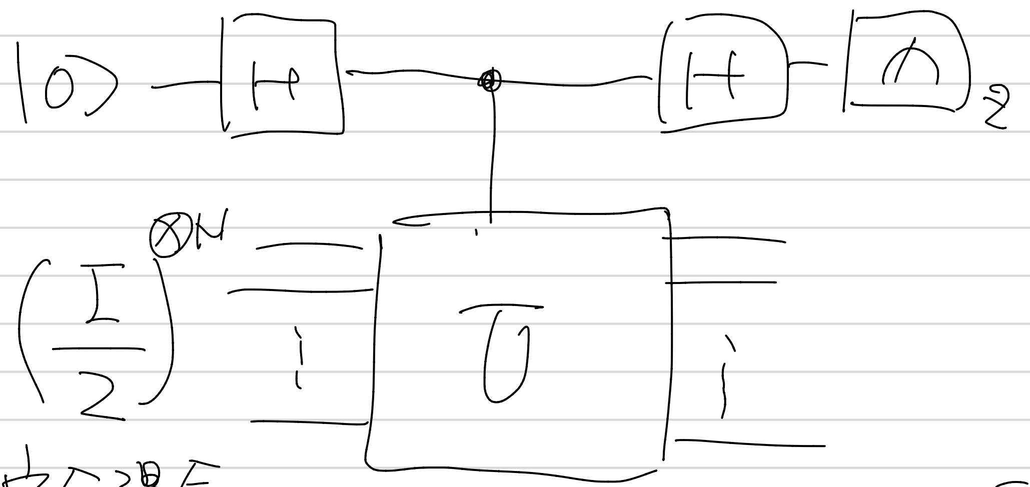
Nature 516, 24–26
(2014)

○量子スプレマシー.

ユニバーサルではないが実験的に実現やすく、"古典ではシミュレートできない"モデル(intermediate model)

計算機科学の秩序が崩壊しない限りシミュレートできない.

- Bosonsampling (Linear optics)
- IQP (可換量子回路)
- DQC1 (NMR量子コンピュータ)



完全混合状態 $\longrightarrow$ $p_0 = \dfrac{1+\mathrm{Re}\left[\mathrm{Tr}[U]/2^n\right]}{2}$